Известия НАН Армении, Физика, т.29, №5, с 171 - 177 (1994)

УДК 621.382.01

О КОРРЕКТНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ЛАНЖЕВЕНА В НИЗКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Ф.В. ГАСПАРЯН, С.В. МЕЛКОНЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 12 июля 1994 г.)

Рассмотрены вопросы корректности использования в области низких частот метода расчета шумов Ланжевена, выявлены некоторые особенности и даются пределы применимости этого метода.

1. Введение

Реализация случайной функции $\xi(t)$ обычно [1] обозначается через $\xi^{(k)}(t)$, где k—порядковый номер реализации. Детерминированный процесс имеет одну единственную реализацию. Для заданного значения времени t среднее по множеству реализаций определяется как [2]

$$\langle\xi^{(k)}(t_1)\rangle=\lim_{N\to\infty}(\sum_{k=1}^{N}\xi^{(k)}(t_1))/N\ , \tag{1}$$

где левая сторона не зависит от k, N—число реализаций. В общем случае при $t_1\neq t_2$

$$\langle\xi^{(k)}(t_1)\rangle\neq\langle\xi^{(k)}(t_2)\rangle\ . \tag{2}$$

Корреляционная функция тесно связана с понятием спектра:

$$B(t_1,t_2)=\langle\xi^{(k)}(t_1)\cdot\xi^{(k)}(t_2)\rangle\ . \tag{3}$$

Для ограниченного круга явлений усреднения по большому числу реализаций в моменты времени t_1 и t_2 могут быть идентичными, для них

$$\langle\xi^{(k)}(t)\rangle=\langle\xi^{(k)}(0)\rangle=\mathrm{const};\ \langle\xi^{(k)}(t_1)\cdot\xi^{(k)}(t_2)\rangle=B(\tau),\ \tau=t_2-t_1\ . \tag{4}$$

Такой процесс называется стационарным случайным процессом (СП), для него корреляционная функция не зависит от времени.

Среднее по времени от функции $\xi^{(k)}(t)$, как обычно,

$$\overline{\xi^{(k)}(t)}=\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\xi^{(k)}(t)dt\ , \tag{5}$$

где T_0—интервал усреднения, а левая сторона не зависит от t, но может зависеть от k. Эргодичность системы устанавливает независимость среднего значения СП от k и t

$$\langle\xi^{(k)}(t)\rangle=\overline{\xi^{(k)}(t)}\,. \tag{6}$$

Требование независимости (6) от t показывает, что необходимым условием эргодичности является стационарность СП. Однако стационарность еще не достаточное условие эргодичности.

Таким образом:

а) Временное среднее реализации $\xi^{(k)}(t)$ есть постоянная составляющая данной реализации, которая для неэргодического СП зависит от индекса k.

б) Временная корреляционная функция реализации $\xi^{(k)}(t)$

$$\Gamma^{(k)}(\tau)=\overline{\xi^{(k)}(t)\cdot\xi^{(k)}(t+\tau)}=\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\xi^{(k)}(t)\xi^{(k)}(t+\tau)dt \tag{7}$$

зависит от k и τ для стационарного СП и для эргодического процесса зависит только от τ.

2. Обсуждение процедуры вычисления шумов методом Ланжевена

Рассмотрим метод вычисления шумов Ланжевена. Вычисление спектральной плотности шумов (СПШ) обычно сводится к следующему [2]:

а) Составляется уравнение Ланжевена

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-R(n,p)+G(n,p)+r(t)\ , \tag{8}$$

где R и G — темпы рекомбинации и генерации электронов, n и p— концентрации электронов и дырок, $r(t)$—случайные потоки, связанные со случайным характером генерационно-рекомбинационных процессов. В (8) не учтено пространственное перемещение носителей заряда, не влияющее на общность рассматриваемых ниже вопросов. Для простоты и наглядности рассматривается ланжевеновское уравнение непрерывности для электронов.

Одна из причин флуктуации числа носителей $\Delta n(t)$ связана с малыми отклонениями заселенностей различных энергетических уровней от их средних значений $\langle n\rangle$. Приняв $\Delta n(t)=n(t)-\langle n\rangle$, можно линеаризовать эту систему и получить уравнение для Δn:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t}=-\frac{\Delta n}{\tau}+r(t)\ , \tag{9}$$

где τ—время жизни электронов при излучательной рекомбинации.

б) Производится разложение Δn в ряд Фурье в интервале $0\leq t\leq T$:

$$\Delta n_T(\omega)=\frac{1}{T}\int_0^T \Delta n(t)e^{-i\omega t}dt\ , \tag{10}$$

и СПШ флуктуирующей величины $\Delta n(t)$ определяется по формуле

$$S_n(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle 2T\Delta n_T(\omega)\cdot\Delta n_T^*(\omega)\rangle\ . \tag{11}$$

Хорошо известно [1,2], что

$$B(0)=\langle\Delta n^2(t)\rangle=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_n(\omega)d\omega\ . \tag{12}$$

Из выражений (9)-(11) легко получить общеизвестное выражение для $S_n(\omega)$ (см. также [2,3]):

$$S_n(\omega)=S_r(\omega)\frac{\tau^2}{1+(\omega\tau)^2}\ , \tag{13}$$

где $S_r(\omega)$—спектр ланжевеновских источников.

Ниже представлены некоторые, на наш взгляд, важные детали вычисления СПШ на основе точных понятий теории флуктуации.

2.1. Рассмотрим, например, шумы в полупроводниках, связанные с флуктуациями скоростей генерации и рекомбинации типа зона-зона. Для излучательной рекомбинации и тепловой генерации носителей заряда в собственном полупроводнике считается [3], что

$$R=\alpha n^2;\ \ G=\mathrm{const}\ , \tag{14}$$

где α—коэффициент излучательной рекомбинации.

Из (8) и (14) для k-ой реализации имеем

$$\frac{\partial n^{(k)}}{\partial t}=-R^{(k)}+G^{(k)}+r^{(k)}(t)=-\alpha\cdot(n^{(k)})^2+G^{(k)}+r^{(k)}(t)\ . \tag{15}$$

Усреднив по реализациям, получим

$$-\langle R^{(k)}\rangle+\langle G^{(k)}\rangle=0;\quad -\alpha\langle(n^{(k)})^2\rangle+\langle G^{(k)}\rangle=0\ , \tag{16}$$

поскольку для стационарного СП $\langle n^{(k)}(t)\rangle = n_{ср} = \text{const}$, а $\langle r^{(k)}(t)\rangle = 0$ по определению. Приняв в общем случае

$$R^{(k)}(t) = \langle R^{(k)}(t)\rangle + \Delta R^{(k)}(t);\ G^{(k)}(t) = \langle G^{(k)}(t)\rangle + \Delta G^{(k)}(t);\ n^{(k)}(t) = n_{ср} + \Delta n^{(k)}(t) \quad (17)$$

из уравнения (16) с учетом (12) и (15) получим:

$$\frac{\partial \Delta n^{(k)}(t)}{\partial t} = -2\alpha n_{ср} \Delta n^{(k)}(t) - \alpha(\Delta n^{(k)}(t))^2 + \frac{\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)d\omega + \Delta G^{(k)} + r^{(k)}(t). \quad (18)$$

Поскольку $\Delta G^{(k)}(t) = 0$, линеаризируя (18) для выбранной модели рекомбинации (14), получим

$$\frac{\partial \Delta n^{(k)}(t)}{\partial t} = -2\alpha n_{ср} \Delta n^{(k)}(t) + \frac{\alpha}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)d\omega + r^{(k)}(t)\ . \quad (19)$$

Уравнение (19) существенно отличается от (9): усредняя обе части (9) по k, получим 0=0, усреднение (19) дает 0=0+A+0, где $A = \frac{\alpha}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)d\omega$ есть постоянное число. Равновесие в (19) нарушено. Для идентификации (19) с (9) необходимо пренебречь числом А. Не ясны предпосылки пренебрежения этим числом.

Используя уравнение (19) с нарушенным балансом, получим для $S_n(\omega)$:

$$S_n(\omega) = [S_r(\omega) + A^2\delta^2(\omega)]\frac{\tau^2}{1+(\omega\tau)^2}\ , \quad (20)$$

и следовательно, $S_n(0) \to \infty$, что непонятно с физической точки зрения, но согласуется с результатами экспериментов по $1/f$-шуму. В (20) $\delta(\omega)$— дельта-функция. Для выхода из такого положения можно предположить, что уравнение (19) неверно. Может быть рано произведена линеаризация уравнения (18)? Применение Фурье-преобразования перед линеаризацией связано с проблемой наличия квадратичного члена $(\Delta n^{(k)}(t))^2$, поскольку $(\Delta n^{(k)}(t))^2\big|_{\text{фурье сост.}} \neq (\Delta n^{(k)}(\omega))^2$. Заметим также, что уравнения (9) и (18) приводят к разным уравнениям для корреляционной функции. Из (9) получается

$$\frac{\partial^2 B(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\partial B(t_1 t_2)}{\partial t_1} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\partial B(t_1 t_2)}{\partial t_2} + \frac{1}{\tau^2}\cdot B(t_1,t_2) = B_r\ , \quad (21)$$

а из (18) имеем

$$\frac{\partial^2 B(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}+\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\partial B(t_1 t_2)}{\partial t_1}+\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\partial B(t_1 t_2)}{\partial t_2}+\frac{1}{\tau^2}\cdot B(t_1,t_2)=B_r+A^2 . \qquad (22)$$

Разница между (21) и (22) очевидна.

Из вышесказанного ясно, что даже если бы линеаризовать (18) так, чтобы сохранялся баланс (т.е. получить "балансированное" уравнение (19)), все же можно ожидать особенности на СПШ.

2.2. Вновь рассмотрим уравнение непрерывности электронов (15). В нефлуктуирующей системе ($r=0$) в стационарном случае $\left(\frac{\partial n}{\partial t}=0\right)$ под величиной n подразумевается обычно ее стационарное значение $n=n_{ст}$. Тогда из (15) и (16) соответственно имеем

$$G=\alpha n_{ст}^2 , \qquad (23)$$

$$-\alpha(\langle \tilde{n}^{(k)}\rangle)^2-\alpha\langle(\Delta n^{(k)})^2\rangle+\langle G^{(k)}\rangle=0 . \qquad (24)$$

Исключив $\langle G^{(k)}\rangle$ из (23) и (24) с учетом того, что $G=\mathrm{const}$, получим

$$n_{ср}^2+\langle\Delta n^2\rangle=n_{ст}^2 . \qquad (25)$$

Формула (25) указывает на важное обстоятельство: $n_{ср}\neq n_{ст}$. Отметим, что во всех известных нам работах по вычислению СПШ как бы априори полагается $n_{ср}=n_{ст}$ (см., например, [2-4]). Таким образом, при вычислении СПШ, когда с целью линеаризации применяется подстановка (17), под величиной среднего значения концентрации необходимо подразумевать не $n_{ст}$, а

$$n_{ср}=n_{ст}\left(1-\frac{\langle\Delta n^2\rangle}{n_{ст}^2}\right)^{1/2} .$$

Для использования условия $n_{ср}=n_{ст}$ необходимо выполнение не столь уж очевидного неравенства

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}S_n(\omega)d\omega<<n_{ст}^2 . \qquad (26)$$

2.3. При исследовании флуктуационных явлений эффективным математическим методом является Фурье-анализ [1-3]. Однако непосредственное применение метода Фурье невозможно по следующим причинам:

- анализ Фурье применяется для периодических явлений, в то время как флуктуации являются апериодическими процессами;

- коэффициенты Фурье для данного процесса не всегда ограничены и могут существовать частоты, для которых они обращаются в бесконечность.

Преодолеваются эти проблемы следующими способами [1]:

а) Из апериодической функции $n(t)$ строится новая функция $n'(t)$ с периодом $2T$ и уже к этой новой функции применяется Фурье-анализ.

б) Для обеспечения сходимости коэффициентов Фурье в теории флуктуации обычно рассматривается не сама функция $n(t)$, а ее "флуктуация" $\Delta n_1(t)=n(t)-\overline{n(t)}$, так что для Фурье-анализа необходимым является условие равенства нулю временного среднего.

Как указывалось выше для стационарных процессов флуктуация $\Delta n^{(k)}(t)$ представляет собой разность $n^{(k)}(t)-\langle n^{(k)}(t)\rangle$, где усреднение проводится по реализациям. Таким образом, спектральная плотность или корреляционная функция определяется и вычисляется для величины $\Delta n^{(k)}=n^{(k)}(t)-\langle n^{(k)}(t)\rangle$, а Фурье-анализ применим только к величине $\Delta n_1^{(k)}=n^{(k)}(t)-\overline{n^{(k)}(t)}$. В общем случае $\langle n^{(k)}(t)\rangle\neq\overline{n^{(k)}(t)}$ (Знак равенства имеет место только для эргодических процессов). Тогда получим

$$\left\langle \Delta n_1^{(k)}(\omega)\cdot\Delta n_1^{(k)*}(\omega)(\omega^2+4\alpha^2(\overline{n^{(k)}})^2)\right\rangle=S_r(\omega)+\left\langle \delta^2(\omega)(G^{(k)}-\alpha(\overline{n^{(k)}})^2\right\rangle. \quad (27)$$

При вычислениях СПШ необходимо в уравнении (27) от величины $\Delta n_1^{(k)}$ перейти к $\Delta n^{(k)}$, а к усреднениям надо проявлять осторожность, поскольку временное среднее $\overline{n^{(k)}(t)}$ зависит от номера "k". Из вышесказанного имеем

$$\langle\Delta n_1^{(k)}\rangle=0,\quad \overline{\Delta n^{(k)}(t)}=\Delta n^{(k)}(\omega=0),\quad \Delta n_1^{(k)}(t)=\Delta n^{k}(t)+n_{cp}-\overline{n^{(k)}}\ . \quad (28)$$

Следовательно,

$$\Delta n_1^{(k)}(\omega)=\Delta n^{(k)}(\omega)-\Delta n^{(k)}(\omega=0)\cdot\delta(\omega)\ . \quad (29)$$

Используя (28) и (29), из уравнения (27) можно получить выражение для СПШ $S_n(\omega)$.

3. Заключение

Результаты вычислений СПШ методом Ланжевена хорошо описывают опытные данные, особенно на средних и высоких частотах. В настоящей работе проанализированы некоторые существенные особенности метода

Ланжевена при расчетах на низких частотах (на примере расчета СПШ в полупроводниках с излучательной рекомбинацией, для которого на основе общих рассуждений получено обобщенное выражение (20)). Последнее существенно отличается от известных в литературе выражений типа (13). Наличие в (20) δ—функции указывает на то, что коррекция уравнения (13) имеет место в основном в НЧ области спектра. Предварительное предположение, что поправка в (20) связана с нарушением очередности линеаризации и Фурье-анализа, опровергается нетождественностью уравнений (21) и (22). Неопределенность $S_n(0)\rightarrow\infty$, возможно, следует устранить совершенствованием моделей рекомбинации. Следует изучить правомерность условия $\Delta G^{(k)}=0$. Определено условие применимости равенства $n_{ст}=n_{ср}$. Поскольку в НЧ области обычно превалирует шум со спектром $1/f$, то условие (26) может сильно нарушиться. Для стационарных СП, особенно при очень низких частотах, с уравнением Ланжевена надо обращаться осторожно и отличать величину $S_{\Delta n_1}$ от $S_{\Delta n}$.

Авторы выражают благодарность профессору Вл.М.Арутюняну за полезные обсуждения и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дж. Бендат**. Основы теории случайных процессов и ее применения. М., Наука, 1965.
2. **А. Ван дер Зил**. Флуктуационные явления в полупроводниках. М., ИЛ., 1961.
3. **Н.Б. Лукьянчикова**. Флуктуационные явления в полупроводниках и полупроводниковых приборах. М., Радио и связь. 1990.
4. **C. Huang, A. Van der Ziel**. Physica, **78**, 220 (1974).

ON THE CORRECTNESS OF THE LANGEVIN METHOD APPLICATION IN THE LOW-FREQUENCY REGION

F.V. GASPARYAN, S.V. MELKONYAN

The question of the correctness of the noises Langevin calculation method using in the low-frequency region is considered. Some peculiarities are revealed and application limits of this method are given as well.