

УДК 537.8

СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ БОЛЬШИХ ТОРОВ

Э.Д. ГАЗАЗЯН, М.И. ИВАНЯН, А.Д. ТЕР-ПОГОСЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 21 марта 1994г.)

Анализируются решения уравнения Гельмгольца получаемые в приближении больших торов в тороидальной и квазисферической системах координат. Получены равномерные коротковолновые асимптотики решений уравнений Максвелла в квазисферической системе координат.

1. Введение

Определение типов собственных колебаний и их собственных значений в замкнутых системах (резонаторах и волноводах) сопряжено с поиском решений уравнений Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 \epsilon \mu u = 0 \quad (1)$$

и/или уравнений Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = ik \mu \vec{H}, \quad \text{rot} \vec{H} = -ik \epsilon \vec{E} \quad (2)$$

(здесь $k = w/c$ - волновое число, c - скорость света в вакууме, ϵ , μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды), удовлетворяющих граничным условиям на поверхности системы.

Если внешняя граница системы совпадает с одной из координатных поверхностей какой-либо из известных ортогональных систем координат, поиск решений уравнений (1),(2) осуществляется в виде функций с разделяющимися переменными. В частности, решение уравнения (1) (в случае его существования) может быть записано в виде

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3), \quad (3)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 - координатные функции используемой ортогональной системы координат, функции $f_l(\xi_l)$ ($l=1,2,3$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка

$$f_l''(\xi_l) + \alpha_l(\xi_l) f_l'(\xi_l) + k^2 \beta_l(\xi_l) = 0, \quad (4)$$

а функция $g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ связана с функциями $f_1(\xi_1)$ и $\alpha_1(\xi_1)$ соотношениями

$$\Delta g - k^2 g(\beta_1/h_1^2 + \beta_2/h_2^2 + \beta_3/h_3^2 - \epsilon\mu) = 0, \quad (5)$$

$$\alpha_1(\xi_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(g^2 h_1 h_2 h_3 / h_1^2),$$

где h_i - коэффициенты Ламе используемой системы координат.

В случае, если функция $g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta g = 0, \quad (6)$$

то условие (5) сводится к необходимости тождественного выполнения равенства

$$\beta_1(\xi_1)/h_1^2 + \beta_2(\xi_2)/h_2^2 + \beta_3(\xi_3)/h_3^2 = \epsilon\mu, \quad (7)$$

которое, в свою очередь, эквивалентно наличию общего решения (т.е. решения, содержащего две независимые константы) геометрикооптического уравнения эйконала

$$(\nabla\Psi)^2 = \epsilon\mu \quad (8)$$

вида

$$\Psi = \Psi_{P_1 P_2 P_3} = \sum_{i=1}^3 (-1)^{P_i} \int \sqrt{\beta_i(\xi_i)} d\xi_i, \quad P_i = 0, 1. \quad (9)$$

Из анализа всех известных ортогональных систем координат можно сделать следующие выводы: если путем подбора соответствующей функциональной зависимости от координат показателя преломления среды $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ удастся получить общее решение с разделяющимися переменными уравнения (8), то для тех же параметров среды имеет место разделение переменных в уравнении (1) и обеспечивается выполнение тождества (6). В противном случае необходимым условием разделения переменных в уравнении (1) является наличие решений относительно функции $g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\beta_1(\xi_1)$ уравнения (5), которое, как правило, оказывается неразрешимым.

В случае рассмотрения полых систем ($\epsilon, \mu = 1$) возможности получения точного решения еще более суживаются: не все системы, допускающие разделение переменных при переменном показателе преломления, сохраняют эту возможность при постоянном значении этого параметра. В этом случае возможен подбор такой функциональной зависимости показателя преломления среды, которая, обеспечивая разделение переменных в исследуемой системе координат, одновременно практически обращает его в константу в определенной области пространства. Это обстоятельство позволяет получить из точного решения для системы с неоднородным заполнением строгую асимптотику решения для полых

системы, характерные размеры которой удовлетворяют условиям, при которых показатель преломления может быть принят постоянным во всем рассматриваемом объеме [1, 2]. Если же такая возможность отсутствует, приближенные решения уравнения (1) определяются неоднозначно, и следует искать эвристические критерии для определения решения.

2. Скалярные моды большого тора

Тор - фигура, образованная вращением окружности радиуса a вокруг оси, расположенной в той же плоскости на расстоянии R ($R > a$) от ее центра. Особенностью тороидальной полости является возможность совмещения ее границы с координатными поверхностями двух различных систем координат: классической тороидальной (допускающей разделение переменных при определенных параметрах среды) и квазисферической (не допускающей разделения переменных ни при каких значениях показателя преломления).

Сравнение решений, получаемых в двух различных системах координат, которые для больших торов ($R \gg a$) практически сливаются, может оказаться полезным для выявления особенностей распространения волн в полном тороиде и выработки критериев построения оптимальных приближенных решений скалярных (1) и векторных (2) уравнений в системах координат, не допускающих разделения переменных.

Связь между координатами тороидальной и декартовой систем имеет следующий вид [3]:

$$x = \frac{b \operatorname{sh} t \cos \varphi}{\operatorname{ch} t - \cos \sigma}, \quad y = \frac{b \operatorname{sh} t \sin \varphi}{\operatorname{ch} t - \cos \sigma}, \quad z = \frac{b \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t - \cos \sigma}, \quad (10)$$

причем координата t описывает поверхности торов, малый радиус которых равен $r = b/\operatorname{sh} t$.

Координаты квазисферической и декартовой систем связаны следующим образом:

$$x = R h \cos \varphi, \quad y = R h \sin \varphi, \quad z = R \rho \sin \theta, \quad (11)$$

$$h = 1 - \rho \cos \theta, \quad \rho = r/R,$$

здесь r - малый радиус тороидальной координатной поверхности.

При определении собственных функций и собственных значений тороидального резонатора, как правило [4-7], применяется квазисферическая система координат (11), повидимому, в силу ее большей наглядности. При этом обычно применяется подстановка (см., например, [4])

$$U = g(\rho, \theta) \Phi(\rho, \theta) e^{im\varphi}, \quad m = 1, 2, 3 \dots, \quad (12)$$

где

$$g(\rho, \theta) = 1/\sqrt{h}. \quad (13)$$

Получаемое в результате уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \left(\frac{1/4 - m^2}{h^2} + k^2 R^2 \right) \Phi = 0 \quad (14)$$

при $h \rightarrow 1$ (что соответствует $R \gg a$) дает следующее решение уравнения (1):

$$U = \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} J_n(\kappa \rho) e^{im\varphi}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 R^2 - m^2 + 1/4}, \quad (15)$$

где $J_n(\kappa \rho)$ - функция Бесселя первого рода ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Согласно (15), моды большого тороидального резонатора (в пределе $a/R \rightarrow 0$) идентичны модам цилиндрического волновода, замкнутого на бесконечности.

Возможно и иное решение уравнения (1) в квазисферической системе координат: подставляя в него выражение (12) при

$$g(\rho, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta / 2 \\ \sin \theta / 2 \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad (16)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\Phi}{4\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \mp \frac{\operatorname{ctg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \theta / 2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \\ + \left(\frac{1/4 - m^2}{h^2} + k^2 R^2 \right) \Phi = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

что при $h \rightarrow 1$ дает

$$U = W(\kappa \rho, \theta, \varphi), \quad (18)$$

$$W(\kappa \rho, \theta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \sin \theta / 2 C_{2n-1}^{(1)}(\cos \theta / 2) \\ \cos \theta / 2 C_{2n-1}^{(1)}(\sin \theta / 2) \end{array} \right\} J_n(\kappa \rho) e^{im\varphi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $C_{2n-1}^{(1)}(\cos \theta / 2)$ - ультрасферические многочлены Гегенбауэра [3,8]. Решения (15) и (18) имеют одни и те же собственные значения, но существенно разнятся своими полярными составляющими: первое решение обладает как симметричными, так и антисимметричными относительно плоскости симметрии тора $z = 0$ модами; во втором случае реализуются только антисимметричные моды. Кроме того, в последнем случае имеет место (при $n > 1$) некоторая асимметрия в решении относительно внешней и внутренней "половинок" тора, что можно трактовать как следствие неодинакового их расположения по отношению к его центру. Предположительно можно заключить, что решение

(18) более соответствует геометрии тора, но окончательно решить этот вопрос можно, обратившись к поискам решения уравнения (1) в классической тороидальной системе координат, в которой возможно разделение переменных в уравнениях Гельмгольца и эйконала при

$$\epsilon\mu = \frac{(\text{ch}\tau - \cos\sigma)^2}{\text{sh}^2\tau} \quad (19)$$

Подстановка в (1)

$$U = g(\tau, \sigma) \Phi(\tau, \sigma) e^{im\varphi}, \quad (20)$$

где

$$g(\tau, \sigma) = \begin{Bmatrix} \sin\theta / 2 \\ \cos\theta / 2 \end{Bmatrix} \sqrt{\text{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad (21)$$

приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \text{ctg}\tau \frac{d\Phi}{d\tau} + \left(\frac{(kb)^2}{\text{sh}^2\tau} - \frac{m^2}{\text{sh}^2\tau} \right) \Phi + \frac{d^2\Phi}{d\sigma^2} \mp \\ \mp \begin{Bmatrix} \text{ctg}\theta / 2 \\ \text{tg}\theta / 2 \end{Bmatrix} \frac{d\Phi}{d\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

решением которого является [1,2]

$$\Phi(\sigma, \tau) = \begin{Bmatrix} C_{2n-1}^{(1)}(\cos\sigma / 2) \\ C_{2n-1}^{(1)}(\sin\sigma / 2) \end{Bmatrix} P_{n-1/2}^{i\sqrt{(kb)^2 - m^2}}(\text{ch}\tau), \quad (23)$$

где $P_{n-1/2}^1(\text{ch}\tau)$ - присоединенные функции Лежандра с полуцелым нижним индексом - функции тора [8], дифференциальное уравнение для которых при $\tau \gg 1$ (что соответствует $R \approx b \gg a$), когда $\text{ch}\tau \approx \text{sh}\tau \gg 1$ и $\rho = 2e^{-\tau}$, $\epsilon\mu \rightarrow 1$, преобразуется к виду

$$v''(\rho) + \left\{ (kR)^2 - m^2 - \frac{n^2 - 1/4}{\rho^2} \right\} v(\rho) = 0, \quad (24)$$

имеющему решение

$$P_{n-1/2}^{i\bar{\kappa}} \rightarrow v(\rho) = \sqrt{\rho} J_n(\bar{\kappa}\rho), \quad \bar{\kappa} = \sqrt{(kR)^2 - m^2}. \quad (25)$$

Параметр σ может быть выражен через координатные функции θ и r квазисферической системы координат:

$$\sigma = \arctg \frac{2R\sin\theta}{r - 2R\cos\theta}, \quad (26)$$

что при $R \rightarrow \infty$ дает $\sigma = -\theta$.

С учетом вышеизложенного решение для больших полых торов, полученное в тороидальной системе координат и выраженное через координатные функции квазисферической системы, приводит к виду

$$U = W(\bar{\kappa} \rho, \theta, \varphi), \quad (27)$$

отличающемуся от соответствующего решения (18) квазисферической системы координат лишь значением параметра $\bar{\kappa}$ ($\kappa^2 - \bar{\kappa}^2 = 1/4$). Поскольку последнее получено в результате строгого предельного перехода от точного решения и сопряжено с геометрическим решением (имеет место тождество (7)), ему следует отдать предпочтение.

3. Скалярные однородные моды полого тороида

Из наличия общего решения с разделяющимися переменными в уравнении эйконала следует разделение переменных в уравнении Гельмгольца. Однако, если переменные в уравнении эйконала разделяются при каком-либо частном значении одной из констант разделения, то разделение переменных в уравнении Гельмгольца не всегда возможно. Примером может служить уравнение эйконала в квазисферической системе координат для произвольного тора:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2, \quad (28)$$

разделяющееся при $m = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$, и соответствующее ему уравнение

Гельмгольца (см. (14) или (17)), не разделяющееся при $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$.

В этом случае возможно построение равномерной коротковолновой ($\kappa \rightarrow \infty$) асимптотики решения уравнения Гельмгольца в квазисферической системе координат на основе метода, изложенного в [9]. Это решение для произвольной ортогональной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 может быть записано в виде

$$U = \Phi \prod_{i=1}^s \left(\sqrt{\beta_i(\xi_i)} \sqrt{\varepsilon_i(\xi_i)} \right) f_i(\xi_i), \quad s = 1, 2 \text{ или } 3, \quad (29)$$

где Φ - решение геометрического уравнения переноса

$$\operatorname{div}(\Phi \nabla \Psi) = 0, \quad (30)$$

функции $f_i(\xi_i)$ - некоторые функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям второго порядка (4) с весовыми коэффициентами $\alpha(\xi_i)$, $\beta(\xi_i)$, функции $\varepsilon_i(\xi_i)$ связаны с функциями $\alpha_i(\xi_i)$ соотношением

$$\varepsilon_i(\xi_i) = \exp \left\{ \int \alpha_i(\xi_i) d\xi_i \right\}. \quad (31)$$

Наличие асимптотического решения (29), обобщающего геометрикооптическое решение, распространяя его на области расположения каустических поверхностей $\beta_1(\xi_1) = 0$, обусловлено существование решения с разделяющимися переменными уравнения эйконала (8).

Выбор весовых коэффициентов $\beta_1(\xi_1)$ обусловлен необходимостью совпадения решения (29) с геометрикооптическим решением вдали от каустических поверхностей и с точностью до констант разделения совпадает с функциями, входящими в решение уравнения эйконала. Подбор же констант разделения и функций $\alpha_i(\xi_i)$, не дающих вклада в геометрикооптическое решение (см. дебаевскую асимптотику функций $f_i(\xi_i)$ в [9]), может быть обусловлен соответствием полученного решения с уже имеющимися решениями. В рассматриваемом случае подбор весовых коэффициентов в форме ($s = 2$)

$$\beta_1(\rho) = R - \frac{C}{k^2 \rho^2}, \quad \beta_2(\theta) = \frac{C}{k^2},$$

$$C = n^2 - \frac{1}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)$$

$$\alpha_1(\rho) = 0, \quad \alpha_2(\theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \theta / 2 \\ -\operatorname{tg} \theta / 2 \end{pmatrix}$$

обеспечивает совпадение решения

$$U = W(k\rho, \theta, \varphi = 0) / \sqrt{h}, \quad (33)$$

получаемого для однородных мод тора ($m = 0$) с произвольным соотношением большого и малого радиусов при $h \rightarrow 1$, с решением (27) при $m = 0$ для больших торов.

Отметим в заключение настоящего пункта, что методику работы [9] можно использовать также для построения равномерной коротковолновой асимптотики собственных мод большого тороидального резонатора ($R \rightarrow a$) в квазисферической системе координат при произвольных m на базе решения уравнения эйконала, которое в этой системе при $h = 1$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{m^2}{k^2} = R^2. \quad (34)$$

В этом случае подбор функций

$$\beta_1(\rho) = R^2 - \frac{m^2}{k^2} - \frac{n^2 - 1/4}{k^2 \rho^2}, \quad \beta_2(\theta) = \frac{n^2 - 1/4}{k^2}, \quad \beta_3(\varphi) = \frac{m^2}{k^2},$$

$$\alpha_1(\rho) = 0, \quad \alpha_2(\theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \theta / 2 \\ -\operatorname{tg} \theta / 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3(\varphi) = 0, \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \quad (35)$$

обеспечивает полное совпадение решения с соответствующим решением уравнения Гельмгольца в тороидальной системе координат (27), что объясняется согласованностью этих решений с геометрическим решением.

4. Электромагнитные колебания в тороидальной полости

Как известно, в отличие от уравнения Гельмгольца, разделение переменных в уравнениях Максвелла (2) далеко не всегда сопряжено с разделением переменных в уравнении эйконала, вследствие чего разделение переменных в них для многих систем координат, в том числе и для обеих тороидальных, оказывается невозможным. Возможно, однако, построение равномерных коротковолновых асимптотик собственных функций [9]. Условием наличия таких решений, как и в скалярном случае, является разделение переменных в уравнении эйконала.

В коротковолновом приближении собственные колебания в замкнутой полости, границы которой совпадают с одной из координатных поверхностей ортогональной системы координат, разбиваются на Е и Н типы колебаний, что обусловлено неоднозначностью выбора базисных ортов, составляющих ортогональную тройку векторов с градиентом эйконала [9]. В частности, для Н типов волн ($E_{\xi_3} = 0$) электромагнитный аналог решения (29) может быть записан в виде

$$E_{\xi_1} = \frac{Q}{kh_2} \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \quad E_{\xi_2} = -\frac{Q}{kh_1} \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad E_{\xi_3} = 0, \quad (36)$$

$$H_{\xi_1} = \frac{Q}{k^2 h_1 h_3} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_3}, \quad H_{\xi_2} = \frac{Q}{k^2 h_2 h_3} \frac{\partial F}{\partial \xi_2 \partial \xi_3}, \quad H_{\xi_3} = -\left[\frac{\beta_1}{h_1} + \frac{\beta_2}{h_2} \right] QF.$$

Здесь

$$Q = \prod_{i=1}^3 (\sqrt{\beta_i} \sqrt{\epsilon_i}) / \sqrt{\frac{\beta_1}{h_1^2} + \frac{\beta_2}{h_2^2}}, \quad F = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3). \quad (37)$$

Выражения для E типов колебаний ($H_{\xi_i} = 0$) могут быть получены из (36) путем соответствующей замены электрических компонент на магнитные и наоборот.

В рассматриваемом случае большого тороидального резонатора в качестве функций $f_i(\xi_i)$ целесообразно выбрать функции, соответствующие скалярному решению (27) той же задачи, т.е. функции с весовыми коэффициентами (35). Решение для H типов волн в этом случае может быть выражено через упомянутое решение для скалярной задачи:

$$E_\rho = \frac{1}{kR} \frac{W(\bar{\kappa}\rho, \theta, \varphi)}{\partial \theta}, \quad E_\theta = -\frac{1}{kR} \frac{\partial \sqrt{\rho} W(\bar{\kappa}\rho, \theta, \varphi)}{\sqrt{\rho} \kappa \partial \rho}, \quad E_\varphi = 0, \quad (38)$$

$$H_\rho = \frac{im}{kR} E_\theta, \quad H_\theta = -\frac{im}{kR} E_\rho, \quad H_\varphi = -\frac{\bar{\kappa}}{k^2 R^2} W(\bar{\kappa}\rho, \theta, \varphi).$$

Граничными условиями, из которых определится величина $\bar{\kappa}$ или значение волнового числа k , являются

$$\frac{d\sqrt{\rho} J_n(\bar{\kappa}\rho)}{d\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a/R \quad (39)$$

для H типов волн и

$$J_n(\bar{\kappa}\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a/R \quad (40)$$

для E типов волн.

Сравнивая это решение с решением для неоднородных торов при $\mu =$ и $\varepsilon = (\text{cht} - \cos\sigma)^2 / \text{sh}^2\tau$, полученным в [1,2] в тороидальной системе координат на базе функций, входящих в скалярное решение (23), обнаруживаем их совпадение при осуществлении в последнем предельного перехода к большим торам.

Решение для однородной моды ($m = 0$) тороида с произвольным соотношением радиусов ($R > a$) может быть выражено через решение (38), если в нем положить $m = 0$ и разделить все компоненты полей на $\sqrt{h} = \sqrt{1 - \rho \cos\theta}$. Как видно из (38), продольная электрическая компонента, в отличие от поперечных, является симметричной относительно плоскости симметрии тора $z=0$.

5. Заключение

Возможность описания полей внутри тороидальной полости двумя различными тороидальными системами координат указывает на возможность генерации в ней двух различных разновидностей тороидальных колебаний.

В больших торах эти две системы практически сливаются - переходят одна в другую, что приводит к вырождению этих двух разновидностей колебаний.

Проведенный сравнительный анализ двух тороидальных систем координат, сопоставление решений уравнений Гельмгольца, полученных в приближении больших торов, позволили скорректировать решения, получаемые обычно в этом приближении в квазисферической системе координат. Применение асимптотических методов, разработанных ранее авторами, дало возможность получить равномерные асимптотические решения уравнений Максвелла для больших полых торов, согласованные с решениями скалярного уравнения Гельмгольца и с решениями, получаемыми в приближении геометрической оптики.

Вновь полученные решения соответствуют двойственной природе тора, содержащего элементы цилиндра и сферы: их радиальная зависимость подобна решениям для цилиндра и выражается через функции Бесселя целого порядка, а зависимость от полярного угла - через ультрасферические многочлены Гегенбауэра, являющиеся обобщением присоединенных функций Лежандра [8], входящих в решение для сферы.

Эта работа была выполнена при поддержке, в частности, стипендией Мейеровской организации, присужденной Американским физическим обществом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д. Газазян, М.И. Иванян, А.Д. Тер-Погосян. Препринт ЕФИ-887(38)-86, Ереван, 1986.
2. Э. Д. Газазян. Докторская диссертация, Харьковский ун-т, 1990.
3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике, М., Наука, 1970.
4. F. Cap, R. Deatch. IEEE Trans, MTT-26, 7, 478-486 (1978).
5. F. Cap, R. Deatch. IEEE Trans, MTT-28, 7, 700-703(1980).
6. T. Lileg, B. Shnirer, R. Keli. AEU, 37, 359 (1983).
7. Э. Д. Газазян, В.Г. Кочарян, Г.Г. Оксюзян. Препринт ЕФИ-1145(22)-89, ЦНИИатоминформ, Ереван, 1989.
8. М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям, М., Наука, 1979.
9. Э.Д. Газазян, М.И. Иванян. Радиотехника и электроника, 29, N 5, 830 (1984).

SCALAR AND VECTOR TOROIDAL OSCILLATIONS IN BIG TORUS APPROXIMATION

E.D. GAZAZIAN, M.I. IVANIAN, A.D. TER-POGOSSIAN

The Helmholtz equation solutions in big torus approximation are analyzed in toroidal and quasispherical systems of coordinates. The uniform shortwave asymptotics of the Maxwell equations solution in quasispherical system of coordinates are obtained.

**ՍԿԱԼԱՅԱՐ ԵՒ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԹՈՐՈՒԴԱՅԻՆ ՏՆՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ
ՄԵԾ ԹՈՐԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՄԲ**

Է.Դ. ԳԱԶԱՋՅԱՆ, Մ. Ի. ԻՎԱՆՅԱՆ, Ա.Դ. ՏԵՐ-ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Հետազոտված են մեծ թորերի մոտավորությամբ ստացված Հելմհոլցի հավասարման լուծումները թորոյիցալ եւ քվադրատիկ կոորդինատային համակարգում: Ստացված են Մաքսվելի հավասարումների հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկային լուծումները քվադրատիկ կոորդինատային համակարգում: