

УДК 548.732

РЕНТГЕНОВСКИЙ МУАР СЛАБОДЕФОРМИРОВАННЫХ КРИСТАЛЛОВ

М.К. БАЛЯН, К.Т. ГАБРИЕЛЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 15 ноября 1993г.)

В рамках квазиклассического приближения уравнений динамической дифракции рентгеновских лучей рассмотрен механизм образования рентгенодифракционного муара в слабодеформированных кристаллах. Получены общие выражения интенсивностей пучков на выходной поверхности анализатора. Показано, что изолинии интенсивностей совпадают с изолиниями проекции вектора смещения входной поверхности анализатора на вектор дифракции. Обсуждена возможность восстановления поля смещения по экспериментальной муаровой картине.

1. Введение.

Рентгенодифракционный муар возникает в многоблочных интерферометрах, в которых первоначальный рентгеновский пучок расщепляется на несколько когерентных пучков, далее накладывающихся в блоке анализатора с образованием муаровых картин. Ввиду когерентности налагающихся пучков суммируются амплитуды, а не интенсивности этих пучков. Поэтому прямое применение аналогии с оптическим муаром, который получается суммированием интенсивностей накладывающихся пучков [1], может привести к ошибочным выводам о дефектной структуре кристалла. До сих пор рассчитаны интенсивности и профили рентгеновских муаровых картин лишь в случаях очень простых (постоянных) деформаций в пластинах интерферометра или при существенных упрощениях относительно деформаций и геометрии дифракции. Найдены периоды дилатационного, ротационного и смешанного муара, когда межплоскостные расстояния пластин немного отличаются друг от друга и пластины повернуты на малый угол вокруг нормали к входным поверхностям [1-5]. Следует отметить, что формулы для периодов дилатационного, ротационного и смешанного дифракционного муара не отличаются от соответствующих выражений оптического муара. Наверное, это и служит основой того, что механизм образования оптического муара некритическим образом применяется и в случае дифракционного муара [6-8].

В данной работе в рамках квазиклассического приближения динамической дифракции рентгеновских лучей получены выражения для амплитуд и интенсивностей выходящих из анализатора пучков, проведен анализ конфигурации муаровых полос и найдены выражения для периодов этих полос. Найдены те условия, налагаемые на деформацию, когда полученный дифракционный муар представляет из себя прямое отображение вектора смещения. При этом справедлива аналогия дифракционного муара с оптическим

муаром. Обсуждена возможность реконструирования поля смещений по экспериментальной муаровой картине.

2. Общие формулы. Расчет амплитуд интерферирующих пучков

Механизм образования интерференционных картин для двух и многоблочных систем с воздушными прослойками между блоками один и тот же. Во всех этих случаях последовательными отражениями в пластинах интерферометра первичный пучок расщепляется на несколько пучков, которые затем налагаются на поверхности пластины-анализатора. Поэтому теория может быть развита независимо от числа пластин, если нас интересуют деформации анализатора при идеальной структуре остальных пластин.

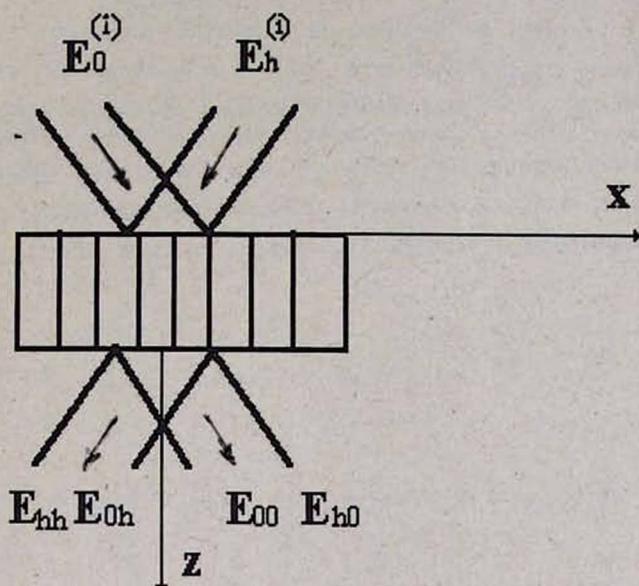


Схема образования рентгеновского муара в кристалле-анализаторе.

Пусть на поверхности анализатора (см. рисунок) налагаются две плоские монохроматические рентгеновские волны с амплитудами $E_0^{(i)}$, $E_h^{(i)}$, с волновыми векторами $\mathbf{K}_0^{(i)}$ и $\mathbf{K}_h^{(i)} = \mathbf{K}_0^{(i)} + \mathbf{h}$ и постоянными фазами ψ_0 и ψ_h . Амплитуды $E_0^{(i)}$, $E_h^{(i)}$ и фазы ψ_0 и ψ_h могут быть рассчитаны на основе динамической теории рассеяния рентгеновских волн в идеальных кристаллах. Предполагается, что во всех пластинах соблюдаются условия Бормановского прохождения, так что в интерференции участвуют только слабопоглощающиеся волны σ поляризации. Амплитуды сформированных в пластине и выходящих оттуда волн обозначены через E_{ij} ($i=0,h$, $j=0,h$), где первый индекс указывает

направление рождающей волны, а второй индекс - направление рождающейся в анализаторе волны. Электрическое поле в анализаторе можно представить в виде

$$E = E_{i0} \exp(i\mathbf{K}_0 \mathbf{r} + ik \frac{\chi_0 T}{2}) + E_{ih} \exp(i\mathbf{K}_h \mathbf{r} + ik \frac{\chi_0 T}{2} - i\mathbf{h}\mathbf{u}), \quad (1)$$

где амплитуды удовлетворяют уравнению Такаги [1]:

$$2i \frac{\partial E_{i0}}{\partial s_0} = k\chi_h E_{ih}, \quad (2)$$

$$2i \frac{\partial E_{ih}}{\partial s_h} - k\alpha E_{ih} = k\chi_h E_{i0},$$

а $\alpha = -\frac{2}{k} \frac{\partial \mathbf{h}\mathbf{u}}{\partial s_h}$ - локальное отклонение от точного угла Брэгга, χ_h и $\chi_{\bar{h}}$ - фурье-коэффициенты поляризуемости идеального кристалла, k - волновое число, s_0 и s_h - координаты вдоль направлений прохождения и дифракции соответственно. Граничные условия на входной поверхности пластины имеют вид:

$$E_{00}|_{z=0} = E_0^{(i)} \exp(i\psi_0)|_{z=0}; \quad E_{0h}|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

$$E_{h0}|_{z=0} = 0; \quad E_{hh}|_{z=0} = E_h^{(i)} \exp(i\psi_h + i\mathbf{h}\mathbf{u})|_{z=0}$$

В общем случае произвольных полей смещений $\mathbf{h}\mathbf{u}$ решение задачи (2)-(3) сталкивается с принципиальными трудностями. Однако для кристаллов с медленно меняющейся деформацией, когда

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{h}\mathbf{u}}{\partial s_0 \partial s_h} \right| \ll \left| \frac{k^2 \chi_h \chi_{\bar{h}}}{4} \right| \equiv \sigma^2, \quad (4)$$

разработаны асимптотические методы [9]. По аналогии с геометрической оптикой в амплитудах E_{ij} выделяются быстро меняющиеся фазовые множители:

$$E_{ij} = E_{ij}^{(1)} \exp(i\phi_i^{(1)}) + E_{ij}^{(2)} \exp(i\phi_i^{(2)}) \quad (5)$$

с эйконалами $\phi_i^{(1)}$ и $\phi_i^{(2)}$, соответствующими двум листам дисперсионной поверхности, удовлетворяющими уравнению в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s_h} + \frac{k\alpha}{2} \right) = \sigma^2. \quad (6)$$

Амплитуды $E_{ij}^{(1)}$, $E_{ij}^{(2)}$ в нулевом приближении определяются из "уравнения переноса":

$$\sigma^2 \frac{\partial E_{ij}^{(k)}}{\partial s_0} + \frac{\partial \phi_i^{(k)}}{\partial s_0} \frac{\partial E_{ij}^{(k)}}{\partial s_h} = 0, \quad i, j = 0, h; \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

В общем случае нахождение эйконалов и амплитуд в форме (6), (7) затруднительно из-за необходимости учета криволинейности лучей. В слабдеформированных кристаллах эту трудность можно преодолеть, выбирая эйконал в форме, соответствующей случаю прямолинейных лучей [9]. Налагая на деформацию условие

$$\left| \frac{k\alpha}{2} \right| \ll |\sigma|. \quad (8)$$

от уравнений (6), (7) переходим к уравнениям

$$\frac{\partial \phi}{\partial s_0} \frac{\partial \phi}{\partial s_h} = \sigma^2. \quad (9)$$

$$\sigma^2 \frac{\partial E_{ij}^{(k)}}{\partial s_0} + \frac{\partial \phi_i^{(k)}}{\partial s_0} \frac{\partial E_{ij}^{(k)}}{\partial s_h} + \frac{ik\alpha}{2} E_{ij}^{(k)} \left(\frac{\partial \phi_i^{(k)}}{\partial s_0} \right)^2 = 0. \quad (10)$$

Решение (9) для падающей плоской волны имеет вид

$$\phi^{(1)} = i\sigma z, \quad \phi^{(2)} = -i\sigma z \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), для "уравнения переноса" получим

$$\frac{\partial E_{ij}^{(k)}}{\partial z} = -\frac{ik\alpha}{2} E_{ij}^{(k)}.$$

Это уравнение имеет общее решение

$$E_{ij}^{(k)} = f_{ij}^{(k)} \exp\left(-i \frac{k}{4} \int_0^z \alpha dz\right)$$

с постоянными $f_{ij}^{(k)}$, которые определяются из граничных условий (3):

$$f_{00}^{(1)} = f_{00}^{(2)} = \frac{E_0^{(i)}}{2} \exp(i\psi_0); \quad f_{0h}^{(1)} = -f_{0h}^{(2)} = \sqrt{\chi_h \chi_{\bar{h}}} \frac{E_0^{(i)}}{2} \exp(i\psi_0);$$

$$f_{h0}^{(1)} = -f_{h0}^{(2)} = \sqrt{\frac{\chi_{\bar{h}}}{\chi_h}} \frac{E_h^{(i)}}{2} \exp(i\psi_h + i\beta); \quad f_{hh}^{(1)} = f_{hh}^{(2)} = \frac{E_h^{(i)}}{2} \exp(i\psi_h + i\beta);$$

где $\beta = \mathbf{hu}(x, y, 0)$ проекция вектора смещения входной поверхности анализатора на вектор дифракции.

Таким образом, для амплитуд слабопоглощающихся волн находим:

$$E_{00}^{(2)} = \frac{E_0^{(i)}}{2} \exp\left(i\phi_0 + i \frac{\sigma T}{\cos \vartheta} - i \frac{k}{4} \int_0^T \alpha dz\right); \quad E_{0h}^{(2)} = \sqrt{\frac{\chi_h}{\chi_{\bar{h}}}} E_{00}^{(2)}; \quad (12)$$

$$E_{hh}^{(2)} = \frac{E_h^{(i)}}{2} \exp\left(i\phi_h + i \frac{\sigma T}{\cos \vartheta} - i \frac{k}{4} \int_0^T \alpha dz\right); \quad E_{h0}^{(2)} = -\sqrt{\frac{\chi_{\bar{h}}}{\chi_h}} E_{hh}^{(2)}.$$

Уравнения (12) при выполнении условий (4),(8) определяют амплитуды выходящих из анализатора пучков, интерференция которых образует муаровую картину. Отметим, что во всех амплитудах деформация присутствует в виде одинакового множителя $\exp(-i \frac{k}{4} \int_0^T \alpha dz)$, так что в этом случае деформация не влияет на вид интерференционных картин.

3. Конфигурация интерференционных полос

Интерференционные картины на выходе анализатора образуются в пучках, распространяющихся по направлениям прохождения и дифракции. В первом из них налагаются волны с амплитудами E_{00}, E_{h0} , а во втором E_{0h}, E_{hh} . Для интенсивностей волн на выходной поверхности анализатора $I_0 = |E_{00} + E_{h0}|^2$ и $I_h = |E_{0h} + E_{hh}|^2$ из (12) получим следующие выражения:

$$I_{0,h} = (I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \beta) \exp\left(-\mu t \left(1 - \frac{|\chi_{hi}|}{|\chi_{oi}|}\right)\right), \quad (13)$$

где $I_1 = E_0^{(i)2}/4$, $I_2 = E_h^{(i)2}/4$, $\mu = k|\chi_{oi}|$ - коэффициент линейного

поглощения. Формула (13) показывает, что изолинии интенсивностей муаровой картины совпадают с изолиниями проекции вектора смещения $\mathbf{u}(x, y, 0)$ на вектор дифракции. В частности, максимумы интенсивности наблюдаются при

$$\beta' = \mathbf{h}\mathbf{u}(x, y, 0) + \psi_h - \psi_0 - \frac{\pi}{2} = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

Таким образом, при выполнении условий (4), (8) конфигурация дифракционных муаровых полос, определяемых уравнением (14), совпадает с конфигурацией полос оптического муара двух решеток, смещенных относительно друг друга на величину $\mathbf{u}(x, y, 0)$.

Из (14) следует, что локальные значения периодов муаровой картины Λ_x и Λ_y вдоль осей Ox и Oy равны

$$\Lambda_x = \frac{2\pi}{\left| \frac{\partial \mathbf{h}\mathbf{u}}{\partial x} \right|}, \quad \Lambda_y = \frac{2\pi}{\left| \frac{\partial \mathbf{h}\mathbf{u}}{\partial y} \right|} \quad (15)$$

Из (15) нетрудно непосредственно определить локальную деформацию $\Delta d/d$ и поворот φ отражающих плоскостей, поскольку известно, что $2\pi / \left| \frac{\partial \mathbf{h}\mathbf{u}}{\partial x} \right| = d^2 / \Delta d$ и $2\pi / \left| \frac{\partial \mathbf{h}\mathbf{u}}{\partial y} \right| = d / \varphi$. В частном случае однородных деформаций из (15) получаются известные значения периодов дилатационного и ротационного муара [1].

Анализ формулы (13) показывает, что фотометрирование муаровой картины дает возможность определить проекцию вектора смещения на вектор дифракции. Рассмотрим для определенности случай трехкристального интерферометра. Тогда, принимая, что на первую пластину интерферометра падает плоская волна - поляризации под точным брэгговским углом и с амплитудой E_0 , и применяя формулы (10) в первых двух пластинах интерферометра при $\sigma = 0$, для амплитуд $E_0^{(i)}$, $E_h^{(i)}$ и для фаз ψ_0 и ψ_h получим следующие выражения (предполагается идеальная геометрия интерферометра и выполнение условия бормановского прохождения $\mu T \gg 1$ для всех пластин):

$$E_0^{(i)} = E_h^{(i)} = \frac{E_0}{4} \exp \left(-\frac{\mu T}{\cos \vartheta} \left(1 - \frac{|\chi_{hi}|}{|\chi_{oi}|} \right) \right),$$

$$\psi_0 = \psi_h = \frac{k |\chi_{hr}| T}{\cos \vartheta}.$$

Подставляя эти значения в (13), для интенсивностей находим

$$I_{0,h} = C(1 + \sin \beta), \quad (16)$$

где через C обозначена постоянная

$$C = \frac{E_0^2}{32} \exp\left(-\frac{3\mu T}{\cos\vartheta} \left(1 - \frac{|\chi_{hi}|}{|\chi_{oi}|}\right)\right).$$

Из (16) для $hu(x, y, 0)$ получим

$$hu(x, y, 0) = \arcsin\left(\frac{I_{0,h} - C}{C}\right). \quad (17)$$

Измерив на экспериментальной муаровой картине значения интенсивностей $I_{0,h}$, из (17) сразу получим значения функции поля смещений $hu(x, y, 0)$ в соответствующих точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Г. Пинскер. Рентгеновская кристаллооптика. М., Наука, 1982.
2. R. Gevers. Phil. Mag., 7, N82, 1681 (1962).
3. П. А. Безирганян, Г.Р. Дрмеян, К.Г. Труни. Препринт ЕГУ ФТТ-18, 1979.
4. Р. И. Багдасарян, М.К. Бальян, Т.О. Эйрамджян, Ф.О. Эйрамджян. Известия вузов, Физика, N4, 8 (1984).
5. В. С. Арутюнян, П. А. Безирганян. Математическое моделирование и применение явлений дифракции. Тезисы докладов Всесоюзного научного семинара. Москва, 1990, с.68.
6. M. Hart. Phyl. Mag., 26, 821, (1972).
7. M. Hart. Proc. R.Soc.Lond., A346, 1, (1975).
8. Н.Д. Раранский. Маятниковые и муаровые полосы в реальных кристаллах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Черновцы, 1987.
9. В.Л. Инденбом, Ф.Н. Чуховский. УФН, 107, вып.2, 229 (1972).

X-RAY DIFFRACTION MOIRE FOR WEAK DEFORMED CRYSTALS

M.K. BALYAN, K.T.GABRIELIAN

The mechanism of X-ray diffraction moire patterns formation in weak deformed crystals is considered in the context of X-ray dynamical diffraction equations quasiclassical approximation. The beams intensity general expressions on the crystal-analyzer exit surface are obtained. It is shown, that the intensity isolines are coincided with those for the analyzer entrance surface displacement vector projection on the diffraction vector. The possibility of displacement field reconstruction by experimental moire pattern is discussed.

Մ.Կ.ԲԱԼՅԱՆ, Կ.Թ.ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ռենտգենյան ճառագայթների դինամիկ դիֆրակցիայի հավասարումների քվազիդասական մոտավորության շրջանակներում դիտարկված է թույլ դեֆորմացված բյուրեղներում ռենտգենադիֆրակցիոն մուարի առաջացման մեխանիզմը: Ստացված են փնջերի ինտենսիվությունների ընդհանուր արտահայտությունները անալիզատորի ելքի մակերևույթի վրա: Ցույց է տրված, որ ինտենսիվության իզոգծերը համընկնում են դիֆրակցիայի վեկտորի վրա անալիզատորի մուտքի մակերևույթի շեղման վեկտորի պրոյեկցիայի հետ: Քննարկված է շեղման դաշտի վերականգման հնարավորության հարցը ըստ փորձնական մուարի պատկերի: