

УДК 621.315.592

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ДВУМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА

А.П. ДЖОТЯН, Э.М. КАЗАРЯН, А.А. САРКИСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 20 апреля 1994г.)

Получено точное решение двумерной релятивистской задачи атома водорода в пренебрежении спинном электромагнитном взаимодействии. Показано, что учет релятивизма приводит к спонтанному вырождению по магнитному квантовому числу m и увеличению энергии связи для возбужденных состояний. Обсуждается вопрос неустойчивости состояний с $m = 0$.

В последние годы продолжает расти интерес к кулоновским задачам в полупроводниковых средах с пространственным ограничением движения носителей заряда в одном (2D) и двух (1D) направлениях (см., например, [1-4]).

Это обусловлено, с одной стороны, развитием микроэлектроники и полупроводниковой техники, позволяющей получение гетероструктур, инверсионных слоев, размерно-квантованных полупроводниковых плёнок и проволок, с другой - рядом задач, связанных с исследованием поведения водородоподобных систем в сильных внешних полях, в частности, сильном магнитном поле. Последнее обстоятельство становится особенно существенным, если учесть, что экстремально сильные магнитные поля, приводящие к "игольчатой" структуре атома водорода, в полупроводниках из-за малости эффективной массы носителей заряда реализуются уже при величинах порядка 10^5 Э.

Имеются также одномерные или двумерные кулоновские задачи, как правило, со стандартным законом дисперсии носителей заряда, возникают при рассмотрении конкретных физических явлений в этих системах, связанных, например, с экситонными или примесными состояниями.

С другой стороны, как известно, для получения тонких полупроводниковых плёнок и проволок часто используются полупроводниковые соединения A^3B^5 с узкой запрещённой зоной, в которых закон дисперсии носителей заряда существенно непараболический (закон дисперсии Кейна [5], аналогичный релятивистскому в двузонном приближении). Отметим, что ранее, в работе [6] была рассмотрена релятивистская задача атома водорода, где, в частности, показано, что учет релятивизма устраняет трудности, связанные с "падением" на центр, возникающим в одномерной кулоновской задаче со стандартным (квадратичным) законом дисперсии носителей заряда.

В связи с вышеизложенным представляет интерес решение двумерной релятивистской задачи атома водорода.

Решение двумерной кулоновской задачи будем искать в области дискретного спектра в пренебрежении спинным электромагнитным взаимодействием; в этом случае

уравнение Клейна-Гордона примет вид

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \right] \psi + \left[\frac{2Ze^2}{\rho h^2} + \frac{Z^2 e^4}{h^2 c^2 \rho^2} - \frac{1}{h^2 c^2} (\mu^2 c^2 - E) \right] \psi = 0, \quad (1)$$

где Ze - заряд ядра, μ - масса электрона.

Представив волновую функцию в виде произведения радиальной и угловой функций и переходя в радиальном уравнении к безразмерной переменной $r = 2\epsilon\rho$ и параметрам

$\epsilon = \hbar c^{-1} (\mu^2 c^4 - E^2)^{1/2}$, $\lambda = \alpha Z E (\mu^2 c^4 - E^2)^{-1/2}$, $\alpha = e^2 / \hbar c$, для радиальной волновой функции $R(r)$ получим уравнение

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{Z^2 \alpha^2 - m^2}{r^2} - \frac{1}{4} \right) R = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$R(r) = r^S \exp(-r/2) U(r).$$

Тогда нетрудно убедиться, что функция $U(r)$ является решением уравнения Куммера

$$rU'' + (2S+1-r)U' + (\lambda - S - \frac{1}{2})U = 0, \quad (3)$$

где $S = \pm(m^2 - Z^2 \alpha^2)^{1/2}$.

Решение уравнения (3) имеет вид

$$U(r) = A \cdot F\left(S + \frac{1}{2} - \lambda, 2S+1, r\right), \quad (4)$$

где $F\left(S + \frac{1}{2} - \lambda, 2S+1, r\right)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. Для сходимости волновой функции при $r \rightarrow 0$ выбираем положительное значение для S ; для сходимости на бесконечности необходимо, чтобы имело место $S + \frac{1}{2} - \lambda = -k$, где k - целое положительное число, аналогичное радиальному квантовому числу в трехмерном случае.

Для энергии связанных состояний и нормированных волновых функций соответственно получаем

$$E = \mu c^2 \left[1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{Z^2 \alpha^2 + \left(k + \frac{1}{2} + \sqrt{m^2 - Z^2 \alpha^2}\right)^2} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\psi = C_{k,s} \exp(im\varphi) \exp(-\epsilon r) (2\epsilon r)^S F(-k, 2S+1, 2\epsilon r),$$

где

$$C_{k,s} = \frac{1}{a_B} \sqrt{\frac{2(2S+1)(2S+K)}{\pi \Gamma(2S+2)k! \left[1 + \frac{k}{S_2 + \frac{1}{2}}\right] Z^2 \alpha^2 + (k+S+\frac{1}{2})^2}}}, \quad (6)$$

$a_B = \hbar^2 / \mu e^2$, а $\Gamma(x)$ -Гамма-функция Эйлера.

Как и следовало ожидать, в предельном случае $Z\alpha \rightarrow 0$ выражения (5), (6) переходят в известные выражения для энергии и волновых функций нерелятивистской двумерной кулоновской задачи [7,8].

При $Z\alpha \ll 1$ из (6) для энергии двумерного релятивистского атома водорода имеем

$$E_{k,m} = \mu c^2 \left[1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2} - \frac{Z^4 \alpha^4}{2mn^3} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \frac{m}{n}\right) \right], \quad m=1,2,3; \quad n=k+|m|+\frac{1}{2} \quad (7)$$

Как следует из (7), энергетический спектр невырожден по магнитному квантовому числу m . Второй член в разложении (7) представляет собой энергию нерелятивистского двумерного атома водорода; как видно из (7), релятивистские поправки увеличивают энергию связи.

Для $m=0$ формула (5) приводит к комплексным значениям энергии, что указывает на появление неустойчивости в рассматриваемой задаче. Ее причину легко понять, если учесть, что слагаемое $Z^2 e^4 / 2 \mu c^2 \rho^2$ в уравнении (1) на языке нерелятивистской теории можно рассматривать как часть потенциальной энергии, имеющую характер притяжения. При $m=0$ это притяжение становится преобладающим, так что возникает падение на центр (аналогичная ситуация возникает в трехмерной задаче при $Z\alpha > 1/2$ [9]).

В реальном случае состояния с $m=0$ для кулоновской задачи реализуются, т.к. ход потенциала на малых расстояниях отличается от кулоновского по различным причинам (экранирование, конечные размеры ядра, радиационные поправки и т.д.) [10].

Вышеуказанные факторы можно учесть введением квантового дефекта Δm порядка или больше величины $Z\alpha$, обеспечивающего стабильность состояний с $m=0$ релятивистского двумерного атома водорода. Конкретный вид Δm зависит от выбора потенциала взаимодействия между заряженными частицами на малых расстояниях.

В заключение обратим внимание на немаловажную деталь, связанную с симметрией данной задачи. В нерелятивистском случае мы имеем вырождение энергетических уровней по "магнитному" квантовому числу m , связанное со следующим обстоятельством: так же, как и в трехмерном случае, двумерный аналог вектора Рунге-Ленца [11] вместе с генератором плоских вращений $\hat{L}_z$ группы $O(2)$ задает скрытую или динамическую неабелеву группу симметрий $O(3)$, коммутирующую с нерелятивистским гамильтонианом. Однако релятивистский гамильтониан уже не коммутирует с этой расширенной группой симметрии. Последнее обстоятельство приводит к понижению симметрии от

$\alpha(3)$ և $\alpha(2)$ և, соответственно, случайное вырождение по m снимается.

Авторы благодарны О.М. Худавердяну за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В.Келдыш. Письма в ЖЭТФ, 29, 716 (1979).
2. В.С.Бабиченко, Л.В.Келдыш, А.П.Силин. ФТТ, 22, 1238 (1980).
3. D.S.Chuu, C.M. Hsiao. Phys.Rev., B, 46, 3898 (1992).
4. G.T.Einevoll. Phys.Rev., B, 45, 3410 (1992).
5. М.Цидильковский. Электроны и дырки в полупроводниках. М., Наука, 1972.
6. H.Spector, J.Lee. Am.J.Phys., 53, 248 (1985).
7. M.Shinada, S.Sugano. J.Phys.Soc.Japan, 21 (1966).
8. Э.М.Казарян, Р.Л.Энфиаджян. ФТП, 5, 2002 (1971).
9. В.М.Галицкий, Б.М.Карнаков, В.И.Коган. Сборник задач по квантовой механике. М., Наука, 1981.
10. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория. М., Наука, 1971.
11. Г.М.Арутюнян, М.Ф.Арутюнян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Препринт ПРЛФ-77-10, Ереван, 1977.

THE RELATIVISTIC HYDROGEN ATOM

A.P. DJOTIAN, E.M. KAZARIAN, H.A. SARKISIAN

The exact solution of two-dimensional relativistic problem of hydrogen atom is found for the case when electronic spin is neglected. It is shown that taking into account of relativism leads to the removal of degeneracy on "magnetic" quantum number and to the increasing of bound energy for excited states. Instability of states with $m = 0$ is discussed.

ՋՐԱԾՆԻ ՄԻԱԶԱՓ ՌԵԼԱՏԻՎԻՍՏԻԿԱՆ ՍՏԱԿԱՆ ԱՏՈՄ

Ա.Պ. ԶՈԹՅԱՆ, Է.Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ստացված է ջրածնի ատոմի երկչափ ռելյատիվիստական խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ անտեսված է էլեկտրոնի սպինը: Ցույց է տրված, որ ռելյատիվիզմի հաշվառումը բերում է այլասերման վերացման ըստ m (մագնիսական) քվանտային թվի և կապի էներգիայի աճի գրգռված վիճակների համար: Զննարկվում է անկայունության հարցը $m = 0$ վիճակների համար: