Известия НАН Армении, Физика, т. 29, № 1—2, с. 50—51 (1994)

УДК 539.184

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ВОЛН

А. М. ИШХАНЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 20 августа 1993 г.)

Найдены импульсы, для которых уравнение Шредингера, описывающее взаимодействие двухуровневой системы с двумя полями, сводится к уравнению Хейна. Найден случай, когда решение задачи выражается в элементарных функциях.

1. Временное уравнение Шредингера для двухуровневой системы, взаимодействующей с двумя волнами, сводится к системе:

$$\begin{gathered} ia_{1t}=Wa_2, \quad ia_{2t}=W^*a_1, \\ W=U\exp(-i\Delta_1 t)+V\exp(-i\Delta_2 t), \end{gathered} \tag{1}$$

где U, V—действительные функции от t; звездочка означает комплексное сопряженное.

При $U=V$ эта система эквивалентна двухуровневой задаче с одной волной: $W=2U\cos(\delta t)\exp(-i\Delta t)$, $\Delta=(\Delta_1+\Delta_2)/2$, $\delta=(\Delta_1-\Delta_2)/2$, для которой найдены широкие классы импульсов, допускающих аналитическое решение (см., например, [1—3]). В тривиальном случае $\Delta_1+\Delta_2=0$ W становится действительной, и система имеет простое решение: замена $z=2\int U\cos\Delta_1 t dt$ сводит исходную систему к уравнению $a_{1zz}+a_1=0$.

Других аналитических решений системы (1) на сегодня, по-видимому, не известно. В этой связи заметим, что ввиду наличия у системы (1) особенности на бесконечности применение вычислительных методов для решения задач Коши крайне затруднено и, следовательно, нахождение аналитических решений представляет интерес, по меньшей мере, для тестирования численных методов.

2. Наличие в функции $W(t)$ составляющих $\exp(i\Delta_{1,2}t)$ подсказывает поиск U и V в классе действительнозначных функций от комплексного аргумента $z=\exp(i\delta t)$. Отметим, что к этому классу принадлежат, в частности, $\cos\delta t=(z+1/z)/2$ и $\sin\delta t$.

Переходя в (1) к аргументу z и исключив a_2, получим следующее уравнение:

$$a_{1zz}+\left[\frac{1}{z}-\frac{W_z}{W}\right]a_{1z}-\frac{WW^*}{\delta^2 z^2}a_1=0, \tag{2}$$

$$W=U(z)z^{-\Delta_1/\delta}+V(z)q^{-\Delta_2/\delta}, \quad z=\exp(i\delta t).$$

Рассмотрим класс импульсов:

$$U=U_0(1+nz)^\alpha(1+n/z)^\alpha=(1+2n\cdot\cos\delta t+n^2)^\alpha,\ \delta=\Delta_1-\Delta_2\neq 0. \tag{3}$$

$$V=nU,\ n=\text{const},\ U_0=\text{const}.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при $\alpha=-1$ уравнение (2) представляет собой уравнение Хейна [4], которое имеет четыре простые точки: $z=0,\ -1/n,\ -n,\ \infty$:

$$u_{zz}+\left(\frac{a}{z}+\frac{b}{z+n}+\frac{c}{z+1/n}\right)u_z+\frac{d}{z(z+n)(z+1/n)}u_z=0, \tag{4}$$

где $u=a_1,\ a=\Delta_1/\delta,\ b=1,\ c=0,\ d=-U_0^2/(n\delta^2)$.

При $\alpha=-1/2$ заменой зависимой переменной $a_1=z^\alpha u$ уравнение (2) также сводится к уравнению Хейна (4) с параметрами:

$$a=2\alpha+\Delta_1/\delta+1/2,\ b=1/2,\ c=-1/2,\ d=\alpha(1/n-n)/2,$$

$$\alpha^2+\alpha(\Delta_1+\Delta_2)/(2\delta)-U_0^2/\delta^2=0.$$

Ввиду наличия только простых особых точек решение уравнения Хейна может быть построено стандартным образом.

При $\alpha=-3/2$ вместо (4) получаем следующее уравнение, имеющее также четыре особые точки:

$$a_{1zz}+\left(\frac{a}{z}+\frac{b}{z+n}+\frac{c}{z+1/n}\right)a_{1z}+\frac{d}{(z+n)^2(z+1/n)^2}a_{1z}=0 \tag{5}$$

$$a=\Delta_1/\delta-1/2,\ b=1/2,\ c=3/2,\ d=-U_0^2/n^2\delta^2.$$

Интересно, что при $a=0$, то есть при $\Delta_1+\Delta_2=0$, точка $z=0$ становится неособой и уравнение (5) представляет собой интегрируемый в явном виде частный случай уравнения Римана [4]. Окончательное решение выражается в элементарных функциях:

$$a_1=C_1\left(\frac{z+1/n}{z+n}\right)^{\lambda_1}+C_2\left(\frac{z+1/n}{z+n}\right)^{\lambda_2},$$

где $\lambda_{1,2}$ определяются из уравнения: $\lambda^2-\lambda/2-U_0^2/[4\Delta_1^2(n^2-1)^2]=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A. Bambini, P. R. Berman.** Phys. Rev., **A23, 2496** (1981).
2. **C. E. Carroll, F. T. Hioe.** J. Phys., **A19, 3579** (1986).
3. *А. М. Ишханян.* Изв. АН АрмССР, Физика, **23**, вып. 4, 190 (1988).
4. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифф. уравнениям. М., Наука, 1976.

ANALYTIC SOLUTIONS OF TWO-LEVEL PROBLEM FOR TWO WAVES

A. M. ISHKHANYAN

The Schrodinger equation of two-state system in the field of two waves is shown to have analytic solutions for some pulse functions via reduction of the initial equation to the Heun's equatoin. For specific pulses the solution is found in terms of elementary functions.