ТРЕХУРОВНЕВЫЙ АТОМ В ПОЛЕ ДВУХ ВОЛН

А. М. ИШХАНЫАН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 17 августа 1993 г.)

Найдены новые классы импульсов, допускающих аналитическое решение уравнения Шредингера для трехуровневого атома, взаимодействующего с двумя немонохроматическими волнами. Указаны случаи, когда решение выражается через обобщенные гипергеометрические функции от пяти параметров. Огибающие импульсов имеют квазиступенчатую или колоколообразную форму.

1. Трехуровневый атом в поле двух внешних классических немонохроматических электромагнитных волн в квазирезонансном приближении описывается следующей системой уравнений (постоянная Планка принимается равной единице):

$$\begin{aligned} i a_{1t} &= U \exp(-i \Delta_1 t) a_1, \\ i a_{2t} &= U \exp(i \Delta_1 t) a_1 + V \exp(-i \Delta_2 t) a_3, \\ i a_{3t} &= V \exp(i \Delta_2 t) a_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где U, V — недиагональные матричные элементы гамильтониана взаимодействия, пропорциональные огибающим импульсов, $\Delta_{1,2}$ — расстройки частот полей от атомных, $a_{1,2,3}$ — амплитуды населенностей уровней.

Система (1) для однопараметрического класса импульсов (квазиступенчатые или колоколообразные функции)

$$U = b_1 z^{k_1} (1-z)^{k_2}, \quad V = b_2 z^{n_1} (1-z)^{n_2}, \quad (2)$$

$$z = 1 / (1 + \exp(t/\mu)), \quad (3)$$

для положительных целых или полуцелых $k_{1,2}$ $n_{1,2}$ приводится к одному уравнению третьего порядка относительно a с рациональными коэффициентами:

$$a_{1zzz} + \frac{f_1 z + f_0}{z(1-z)} a_{1zz} + \frac{g(z)}{z^2(1-z)^2} a_{1z} + \frac{h(z)}{z^3(1-z)^3} a_1 = 0, \quad (4)$$

где $f_{0,1}$ — постоянные; h, g — полиномы от z .

Уравнение (4) имеет три ($z=0, 1, \infty$) регулярные особые точки и, следовательно, допускает общее решение в виде суперпозиции всюду на отрезке $[0, 1]$ сходящихся рядов (см. [1, 2])

$$a_1 = \sum_{m=1}^3 A_m z^m \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(m)} z^k, \quad (5)$$

где $C_k^{(m)}$ определяются из некоторого рекуррентного соотношения, а α_m являются корнями кубического характеристического уравнения

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + f_0\alpha(\alpha-1) + g_0\alpha + h_0 = 0, \quad (6)$$

где g_0, h_0 —свободные члены g и h .

В ряде случаев (см. таблицу) удается подобрать параметры задачи таким образом, чтобы g и h имели вид:

$$g = (g_1 z + g_0)(1-z), \quad h = (h_1 z + h_0)(1-z)^2,$$

и тогда решение (5) выражается через обобщенные гипергеометрические функции [1, 2]. Например, для квазиступенчатых импульсов, возрастающих от нуля ($k_1 = n_1 = 0, k_2 = n_2 = 1$)

$$U = b_1 / (1 + \exp(t/\mu)), \quad V = g_2 / (1 + \exp(t/\mu)), \quad \mu < 0 \quad (7)$$

при дополнительном условии $\Delta_1 = 0$ решение задачи (4) задается формулой:

$$\alpha_1 = A_1 z^{\alpha_1} F_2(\alpha_1 - \zeta_1, \alpha_1 - \zeta_2, \alpha_1 - \zeta_3, 1 + \alpha_1 - \alpha_2, 1 + \alpha_1 - \alpha_3, z) + A_2 F_2 + A_3 F_3, \quad (8)$$

где $A_{1,2,3}$ —произвольные постоянные, $F_{2,3}$ получаются от первого слагаемого циклической перестановкой индексов, а $\zeta_{1,2,3}$ определяются из соответствующего кубического уравнения (табл.).

Заметим, что решение трехуровневой задачи для семейства импульсов с произвольной действительной функцией $z(t)$

$$U, V = \frac{b_{1,2}}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{dz}{dt}, \quad \Delta_{1,2} = \left(\frac{\alpha_{1,2}}{z} + \frac{\gamma_{1,2}}{(1-z)} \right) \frac{dz}{dt},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

которое также выражается в обобщенных гипергеометрических функциях, переведено в [3]. Общие для этого семейства и (2) импульсы очевидно находятся из условия $\Delta_{1,2} = \text{const}$. В случае отсутствия точного двухфотонного резонанса (т. к. в данном случае $b_2 U = b_1 V$, то условие $\delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0$ задает тривиальный вариант) получаются импульсы $U, V \sim (1 - \exp(t/\mu))^{-1/2}$, уходящие в бесконечность при $t \rightarrow 0$. Аналитическое решение в гипергеометрических функциях системы, аналогичной (1) (уравнения Блоха), для подобных неограниченных импульсов $U \sim b_1, V = b_2 \exp(t/\mu)$ получено в работе [4]. Отметим еще, что трехуровневая задача (1) в эквидистантном случае ($\Delta_1 = \Delta_2$) или при точном двухфотонном резонансе ($\delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0$) сводится к двухуровневой [5, 6], для которой найдены широкие классы импульсов, допускающих решение в гипергеометрических рядах [7–10].

Аналитические решения трехуровневой задачи обладают тем недостатком, что, как правило, не удается вычислить суммы получающихся рядов, что необходимо для определения таких важных физических величин, как предельные значения амплитуд населенностей и т. д. Даже для простейших и наиболее изученных из этих рядов—обобщенных гипергеометрических функций, в общем случае суммы не-

Таблица.

Классы импульсов, для которых трехуровневая задача допускает аналитическое решение в обобщенных гипергеометрических функциях:

$$U_{1=2}F_2(a_1-\mu_1, a_1-\mu_2, a_1-\mu_3; 1+a_1-a_2, 1+a_1-a_3; (1+e^{-t/\mu})^{-1})$$

$U_{2,3}$ получаются из U_1 перестановкой и дексов,

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)+d_2\mu(\mu-1)+d_1\mu+d_0=0$$

U/b_1	V/b_2	f_0, g_0, h_0	d_0, d_1, d_2	Примечание
$\frac{1}{\sqrt{1+e^{t/\mu}}}$	$\frac{1}{2} \operatorname{sech} \frac{t}{2\mu}$	$f_0=5/2+l\Delta_1\mu$ $g_0=1/2+l\Delta_1\mu/2+\mu^2b_1^2$ $h_0=-\mu^2b_1^2/2$	$d_0=0$ $d_1=9/4-\mu^2b_2^2$ $d_2=4$	$\delta=0$
$\frac{1}{1+e^{t/\mu}}$	$\frac{1}{(1+e^{-t/\mu})^{n_1}}$	$f_0=4\mu(\delta+\Delta_1)+3-n_1$ $g_0=1-n_1+l\mu(\delta+\Delta_1(1-n_1))+$ $+\mu^2b_1^2-\mu^2b_2^2n_1(3-2n_1)$ $h_0=\mu^2b_1^2(l\delta\mu-n_1)$	$d_0=\mu^2b_1^2(1-n_1)$ $d_1=\mu^2b_1^2+\mu^2b_2^2n_1(2n_1-1)+$ $+2-n_1$ $d_2=4-n_1$	$d_2^2=\delta\Delta_1$; $n_1 \in \{0, 1/2, 1\}$
$\frac{1}{1+e^{t/\mu}}$	$\frac{1}{(1+e^{-t/\mu})^{n_1}(1+e^{t/\mu})^{n_2}}$	$f_0=l\delta\mu+3-n_1$ $g_0=1-n_1+l\delta\mu+\mu^2b_1^2+$ $+\mu^2b_2^2(1-2n_2)$ $h_0=\mu^2b_1^2(l\delta\mu-n_1)$	$d_0=\mu^2b_1^2(1-n_1-n_2)$ $d_1=\mu^2b_1^2-\mu^2b_2^2(1-2n_1-2n_2)+$ $+2-n_1-n_2$ $d_2=4-n_1$	$\Delta_1=0$ $(n_1, n_2) \in \{(0, 1)\}$; $(1/2, 1/2); \{(0, 1/2)\}$, при $(n_1, n_2) = (0, 1)$ $\delta \neq 0$

известны (в отличие от гипергеометрических функций от двух и трех параметров) [1, 2]. Анализ тех случаев, когда удается вычислить сумму рядов в конечном виде (в частности, когда ряды просто обрываются), будет приведен в другом месте.

2. В определенных интересных для приложений случаях (быстрое или адиабатически медленное включение взаимодействия) удастся получить асимптотические выражения для сумм рядов.

Изучим подробнее поведение решения задачи (1) для квазиступенчатых импульсов (2) в общем случае ($\Delta_{1,2} \neq 0$). Рекуррентное соотношение для определения коэффициентов разложения (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} & [(\alpha+k+1)(\alpha+k)(\alpha+k-1) - f_1(\alpha+k+1)(\alpha+k) + g_2(\alpha+k+1)]C_{k+1} + \\ & + [-2(\alpha+k+2)(\alpha+k+1)(\alpha+k) + (f_2-f_0)(\alpha+k+2)(\alpha+k+1) + g_1(\alpha+k+2) - \\ & - h_0]C_{k+2} + [(\alpha+k+3)(\alpha+k+2)(\alpha+k+1) + f_0(\alpha+k+3)(\alpha+k+2) + \\ & + g_0(\alpha+k+3) + h_0]C_{k+3} = 0, \quad k \geq -3, \quad C_{-2} = C_{-1} = 0, \quad C_0 = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь коэффициенты полиномов f , g и h задаются формулами:

$$\begin{aligned} f_0 &= 3 + i\mu(\delta + \Delta_1), \quad f_1 = -3, \\ g_1 &= -2 - i\mu\delta - 2(b_1^2 + b_2^2)\mu^2, \\ g_0 &= 1 + i\mu(\delta + \Delta_1) + \mu^2(-\delta\Delta_1 + b_1^2 + b_2^2), \\ g_2 &= \mu^2(b_1^2 + b_2^2) + 1, \quad h_0 = i\delta\mu^2 b_1^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение для квазиэнергий (6) преобразуется к виду

$$\lambda^3 + (\delta + \Delta_1)\lambda^2 + (\delta\Delta_1 - b_1^2 - b_2^2)\lambda - \delta b_1^2 = 0, \quad i\lambda\mu = \alpha,$$

которое имеет три действительных, строго непересекающихся корня.

Асимптотически решение (5) при $t \rightarrow +\infty$ ($\mu < 0$) ведет себя как суперпозиция, вообще говоря, трех квазиэнергетических состояний

$$a_1 \approx \sum_{m=1}^3 A_m \exp(i\lambda_m t), \quad \text{где } A_m \text{ определяются из начальных условий.}$$

Если атом первоначально находился на первом уровне, то непосредственной подстановкой можно убедиться, что A_m удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 A_m \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(m)} &= 1, \quad \sum_{m=1}^3 A_m \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_m + k) C_k^{(m)} = 0, \\ \sum_{m=1}^3 A_m \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_m + k)^2 C_k^{(m)} &= \frac{\mu^2 b_1^2}{i\Delta_1 \mu - 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Проведем анализ полученной системы при быстром и медленном включении взаимодействия.

3. Быстрое включение взаимодействия: $\mu b_{1,2} \gg \mu\delta$, $\mu\Delta_1 \ll 1$.

Нетрудно убедиться, что в этом случае коэффициенты $C_k^{(m)}$ для всех $k > 1$ имеют вид ($\mu \rightarrow 0$)

$$C_k^{(m)} = C_k^{(m)}(d_k + 0(\mu)), \quad C_1^{(m)} = \mu^2 \lambda_m (\Delta_1 - \delta) + 0(\mu^3), \quad C_0 = 1,$$

где d_k от μ не зависит.

Это позволяет разлагать внутренние суммы в (11) по параметру μ , что дает асимптотическую систему для определения A_m :

$$\sum_{m=1}^3 A_m = 1, \quad \sum_{m=1}^3 \lambda_m A_m = 0, \quad \sum_{m=1}^3 \lambda_m^2 A_m = b_1^2.$$

Эта система линейных уравнений, конечно же, совпадает с системой, полученной путем сращивания в $t=0$ решения без взаимодействия с решением при наличии постоянных полей. Точное решение задачи (1), (7) в эквидистантном случае [5] тоже подтверждает справедливость полученной асимптотики.

Медленное включение взаимодействия ($\mu_1 = -\mu \rightarrow +\infty$):

$$\mu_1 b_{1,2}, \mu_1 \delta, \mu_1 \Delta_1 \gg 1. \quad (12)$$

В этом случае все три квазиэнергии системы имеют порядок единицы, и это приводит к следующей оценке для коэффициентов ряда (5):

$$C_k^{(m)} \sim \mu_1, \quad k \ll \mu_1 \text{ и } C_k^{(m)} \sim C_{k-1}^{(m)}, \quad k \gg \mu_1.$$

В силу этого обстоятельства невозможно аппроксимировать ряды (5) конечным числом членов. Несколько модифицировав (12):

$$\mu_1 b_{1,2}, \mu_1 \delta, \mu_1 \Delta_1 \sim \mu_1^2, \quad \mu \geq 0, \quad (12a)$$

можно показать, что для сколь угодно малых γ при $t \rightarrow +\infty$ образуется лишь одно квазиэнергетическое состояние. Таким образом, условие (12) является достаточным для адиабатичности взаимодействия. Тем самым распространяются на трехуровневый случай выводы работы [9] для двухуровневого атома.

Итак, нарушение любого из неравенств (12) должно привести при $t \rightarrow +\infty$ к возникновению в общей суперпозиции состояний осциллирующей доли как минимум еще одного квазиэнергетического состояния.

Например, при сильном двухфотонном и слабом однофотонном резонансах ($\delta \sim 1/\mu_1$, $\Delta_1 \sim 1$) уже при умеренно слабых полях ($b_{1,2} \sim 1/\sqrt{\mu_1}$) возникает существенная примесь третьего квазиэнергетического состояния. А при сильном однофотонном и слабом двухфотонном резонансах ($\delta \sim 1$, $\Delta_1 \sim 1/\mu_1$) получаем, что доля второго квазиэнергетического состояния при $t \rightarrow +\infty$ становится существенной при $b_{1,2} \sim 1/\mu_1$, т. е. при более слабых полях, чем в предыдущем случае. Это, очевидно, имеет простую физическую интерпретацию. Действительно, поскольку вероятность перехода электрона из какого-либо уровня на некоторый другой пропорциональна интенсивности соответствующего резонансного поля, а в нашем случае роль амплитуды поля, действующего между уровнями 1—3, UV , то для достижения слабого порога порядка $1/\mu_1$ «однофотонного» перехода 1→3 в двухфотонном случае требуются относительно более сильные поля $U, V \sim 1/\sqrt{\mu_1}$.

ԼԻՏԵՐԱՏՄՐԱ

1. Г. Бейтман, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1967.
2. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., Наука, 1986.
3. С. Е. Carrroll, F. T. Hioe. Phys. Rev., A36, 724 (1987).
4. J. Zakrzewski, M. Lewenstein, R. Kuklinski. J. Phys., B18, 4631 (1985).
5. А. М. Ишханян, Д. Ю. Меликджанов. ДАН АрмССР, 86, № 2, 71 (1988).
6. Д. Ю. Меликджанян. Известия АН АрмССР, Физика, 27, вып. 1, 3 (1992).
7. A. Vambini, P. R. Bergman, Phys. Rev., A23, 2496 (1981).
8. А. М. Ишханян. Известия АН АрмССР, Физика, 23, вып. 4, 190 (1988).
9. А. О. Меликян. ДАН АрмССР, 51, 214 (1970).
10. С. Е. Carrroll, F. T. Hioe. J. Phys., A19, 3759 (1986).

ԵՌՄԱԿԱՐԴԱԿ ԱՏՈՄԸ ԵՐԿՈՒ ԱՂԻՔՆԵՐԻ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ա. Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Գտնված են իմպուլսների նոր դասեր, որոնց համար կրկու ոչ մոնոթրոմ ալիքների դաշտում եռակարգակ ատոմի վարքը նկարագրող Շրեդինգերի հավասարումն ունի անալիտիկ լուծում: Նշված են այն դեպքերը, երբ լուծումն արտահայտվում է հինգ պարամետրով ընդհանրացված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաներով: Իմպուլսների պարուրիչները աստիճանա կամ զանգակաձև են: Հետազոտված է ատոմի վարքը փոխազդեցության տարրեր ուժիմների դեպքում: Ստացված են հավասարումների բվազիլներգետիկ վիճակների վերադրման գործակիցների սահմանային արժեքների որոշման համար:

THREE-LEVEL ATOM IN THE FIELD OF TWO WAVES

A. M. ISHKHANYAN

The equations of three-level atom driven by two waves are shown to have an analytic solution for some classes of quasistep or bell-shaped functions. In many cases these solutions can be expressed in terms of generalized hypergeometric functions. The limiting values of system levels population for $t \rightarrow \infty$ were investigated.