

О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ
КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

Т. К. МЕЛИК-БАРХУДАРОВ, Л. Л. МИНАСЯН

НПО «Лазерная техника» ЕГУ
(Поступила в редакцию 2 августа 1993 г.)

Предложен подход для получения квазиклассического разложения в квантовой оптике с использованием функциональных интегралов. Рассмотрен процесс развития вынужденного комбинационного излучения в отсутствие затравочных полей.

Одной из причин, тормозящих развитие квантовой нелинейной оптики, является отсутствие достаточно надежных методов для обсуждения электродинамических проблем вблизи классического предела, хотя в семидесятые годы с целью преодоления ограничений теории возмущений в квантовой теории поля был проведен детальный анализ классического предела [1].

Целью настоящей работы является распространение результатов этих исследований в задачах квантовой оптики, поскольку для последних существенно полное динамическое описание, а не только знание структуры стационарных состояний и вероятностей различных процессов. Рассмотрение проведено на примере скалярной модели, описывающей процесс вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), гамильтониан которой имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \int [\pi(x) + (c\nabla\Phi(x))^2 - j(x)\Phi(x) + H_{int}] dx + \\ + \frac{1}{2} \sum_i (P_i^2 + \omega_0^2 Q_i^2). \quad (1)$$

Здесь $x = (r, t)$, $\pi(x)$ — импульс поля $\Phi(x)$, P_i и Q_i — импульсы и координаты молекул среды, взаимодействие которой с полем запишем в виде

$$H_{int}(x) = F(\Phi(x)) \sum_i Q_i \delta(r_i - r),$$

где $F(\Phi) = \alpha^{(1)}\Phi + \frac{1}{2}\alpha^{(2)}\Phi^2$,

$\alpha^{(2)}$ пропорциональна дифференциальной поляризуемости молекул, $j(x)$ — классический ток, посредством которого моделируется возбуждающее систему излучение. Для нахождения корреляционных функций, характеризующих результирующее излучение, введем производящий функционал $W[j_-(x), j_+(x)]$ соотношением

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} W\right) = \langle R_+ R_- \rangle. \quad (2)$$

Здесь усреднение ведется по начальному состоянию, в качестве которого выбирается каноническое распределение невзаимодействующей системы, и

$$R_{\mp} = T_{\mp} \exp \left\{ \mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{\infty} [H_{int}(x) - j_{\mp}(x) \Phi(x)] dx \right\} \quad (3)$$

Входящие в $R_{\mp}$ операторы $\Phi(x)$ взяты в представлении взаимодействия, символ T_{-} означает упорядочение операторов в хронологическом порядке, т. е. в порядке возрастания времени слева направо, а T_{+} — упорядочение в порядке убывания времени слева направо. Дифференцируя производящий функционал по $j_{-}(x)$ и $j_{+}(x)$ и приравнявая $j_{-}(x) = j_{+}(x) = j(x)$, получим систему корреляционных функций, среди которых особое место занимают четыре производные второго порядка, известные как функции Грина. Используя представление Гайзенберга для полевых операторов $\hat{\Phi}(x)$, получим для функций Грина следующие выражения:

$$\begin{aligned} D_{--}(x_1, x_2) &= \langle T^{(-)}(\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)) \rangle - \langle \hat{\Phi}(x_1) \rangle \langle \hat{\Phi}(x_2) \rangle, \\ D_{-+}(x_1, x_2) &= \langle \hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_1) \rangle - \langle \hat{\Phi}(x_1) \rangle \langle \hat{\Phi}(x_2) \rangle, \\ D_{+-}(x_1, x_2) &= \langle \hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2) \rangle - \langle \hat{\Phi}(x_1) \rangle \langle \hat{\Phi}(x_2) \rangle, \\ D_{++}(x_1, x_2) &= \langle T^{(+)}(\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)) \rangle - \langle \hat{\Phi}(x_1) \rangle \langle \hat{\Phi}(x_2) \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Вычисление производящего функционала может быть произведено разложением его по константе взаимодействия поля со средой и последующим использованием теоремы Вика для среднего по каноническому распределению от произведения произвольного числа бозевских операторов. Возникающей при этом теории возмущений может быть придана диаграммная форма, известная как техника Келдыша [2]. Однако вычисление производящего функционала по теории возмущений в задачах квантовой оптики, где в основном реализуется классический предел, требует проведения суммирования членов ряда теории возмущений. Значительно удобнее та формулировка задачи, в которой квазиклассическое разложение следует непосредственно. Для этой цели мы перейдем от операторного формализма к представлению производящего функционала в виде интеграла в пространстве конфигураций поля и траекторий молекул. Отличие нашего случая от неоднократно рассматривавшегося в квантовой теории поля заключается в увеличении числа сверток от одной до четырех $\Delta_{\sigma_1\sigma_2}(x_1, x_2)$. Последние следуют из соотношений (4), где операторы $\hat{\Phi}$ взяты в представлении взаимодействия. Система сверток для среды $G_{\sigma_1\sigma_2}(t_1, t_2)$ в свою очередь получается заменой полевых операторов операторами среды $Q_i(t)$ в (4).

Выпишем выражение для производящего функционала:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} W\right) = \left[\int (D\Phi)(DQ) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (S_0 + S_1)\right) \right] \cdot \left[\int (D\Phi)(DQ) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right]^{-1}, \quad (5)$$

где интегрирование ведется по двойной совокупности конфигураций поля $\Phi_{\pm}(x)$ и траекторий молекул $Q_{l\pm}(t)$, а

$$S_0 = \frac{1}{2} \int dx dx' \Phi_{\sigma}(x) \Delta_{\sigma\sigma'}^{-1}(x, x') \Phi_{\sigma'}(x') + \frac{1}{2} \sum_l \int dt dt' Q_{l\sigma}(t) G_{\sigma\sigma'}^{-1}(t, t') Q_{l\sigma'}(t'),$$

$$S_1 = \sum_{\sigma} \int dx \left(\sigma j_{\sigma}(x) \Phi_{\sigma}(x) + F(\Phi_{\sigma}(x)) \sum_l Q_{l\sigma}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l) \right),$$

Δ^{-1} и G^{-1} — операторы, обратные упомянутым выше сверткам. Используя правила интегрирования гауссовых функциональных интегралов, из задачи можно исключить переменные среды. Другими словами, проинтегрировав по траекториям $Q_{l\pm}$, получим

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} W\right) = \left[\int (D\Phi) e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Phi}} \right] \left[\int (D\Phi) e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Phi}} \right]^{-1}, \quad (6)$$

где

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2} \int \Phi_{\sigma}(x) \Delta_{\sigma\sigma'}^{-1}(x, x') \Phi_{\sigma'}(x') dx dx' -$$

$$- \int F(\Phi_{\sigma}(x)) \sigma G_{\sigma\sigma'}(x, x') \sigma' F(\Phi_{\sigma'}(x')) dx dx' + \int \sum_{\sigma} \sigma j_{\sigma}(x) \Phi_{\sigma}(x) dx,$$

а $S_{0\Phi}$ — «действие» свободного поля, т. е. первый член в (7). Нетрудно показать, что квазиклассическое разложение (6) возникает при вычислении интегралов методом стационарной фазы, т. е. нахождением экстремальной конфигурации Φ_{ex} из уравнения

$$\frac{\delta S_{\Phi}}{\delta \Phi_{\sigma}(x)} = 0 \quad (8)$$

с последующим сдвигом относительно этой конфигурации:

$$\eta_{\sigma}(x) = \Phi_{\sigma}(x) - \Phi_{ex}(x).$$

Выражая функционал S через смещенную конфигурацию $\eta_{\sigma}(x)$ с

$$S = S_{ex} + \frac{1}{2} \int \eta_{\sigma}(x) D_{\sigma\sigma'}^{-1}(x, x') \eta_{\sigma'}(x') dx dx' + S_{ln}', \quad (9)$$

где

$$D_{\sigma\sigma'}^{-1}(x, x') = \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi_{\sigma}(x) \delta \Phi_{\sigma'}(x')} \quad \Bigg| \quad \Phi_{\sigma}(x) = \Phi_{ex}, \quad (10)$$

$$D_{\sigma\sigma'}^{-1}(x, x') = \Delta_{\sigma\sigma'}^{-1}(x, x') - \Pi_{\sigma\sigma'}(x, x'),$$

и вычисляя (6) разложением экспоненты по $S_{ln'}$, получим квази-

классическое разложение. Поляризационный оператор $\Pi_{\alpha\alpha'}(x, x')$, определяемый соотношением (10), в нашей модели ВКР имеет вид

$$\Pi_{\alpha\alpha'}(x, x') = \frac{\partial^2 F}{\partial \Phi_\alpha^2(x)} \sum_{\alpha''} \sigma \int G_{\alpha\alpha''}(x, x'') \sigma'' F(\Phi_{\alpha''}(x'')) \delta_{\alpha\alpha'} \delta(x - x') dx'' + \\ + \frac{\partial F(\Phi_\alpha(x'))}{\partial \Phi_\alpha(x)} \sigma G_{\alpha\alpha'}(x, x') \sigma \frac{\partial F(\Phi_{\alpha'}(x'))}{\partial \Phi_{\alpha'}(x')}.$$

В соотношениях (8) и (10) можно положить $j_+(x) = j_-(x) = j(x)$, в результате чего из четырех компонент $D_{\alpha\alpha'}$ независимыми оказываются лишь три, в качестве которых выбираются запаздывающая $D^R = D_{--} - D_{-+}$, опережающая $D^A = D_{--} - D_{+-}$ и кинетическая $D = D_{++} + D_{--}$ [2]. Из соотношения (10) следуют уравнения Дайсона для запаздывающей функции

$$D^R(x, x') = \Delta^R(x, x') + \int \Delta^R(x, x_1) \Pi^R(x_1, x_2) D^R(x_2, x') dx_1 dx_2, \quad (11)$$

и аналогичное для опережающей функции. Из уравнения Дайсона для кинетической функции перераспределением членов ряда разложения получаем соотношение

$$D(x, x') = \int dx_1 dx_2 [(L(x_1) D^R(x, x_1) \Delta(x_1, x_2) (L(x_2) D^A(x_2, x') + \\ + D^R(x, x_1) \Pi(x_1, x_2) D^A(x_2, x'))]. \quad (12)$$

Входящие в (11) и (12) компоненты поляризационного оператора определяются соотношениями $\Pi^R = \Pi_{--} + \Pi_{-+}$, $\Pi^A = \Pi_{--} + \Pi_{+-}$, $\Pi = \Pi_{--} + \Pi_{++}$ и $I(x) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (c\nabla)^2$.

Знание функций Грина позволяет определить спектральные свойства излучения. Вероятность перехода одноатомного детектора, расположенного в точке $\mathbf{r}$ из основного состояния в возбужденное пропорциональной величине

$$D(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 e^{-i\omega_d(t_2 - t_1)} \langle \hat{\Phi}(\mathbf{r}, t_1) \hat{\Phi}(\mathbf{r}, t_2) \rangle, \quad (13)$$

где ω_d — частота перехода детектора, а начальный момент выбран $t_0 = 0$. В дальнейшем мы ограничимся описанием начального этапа развития процесса ВКР из вакуума, т. е. случаем, когда в источнике, моделирующем внешнее воздействие на систему (накачке), можно пренебречь наличием компонент с комбинационными частотами. Для упрощения задачи будем считать, что ток $j(x)$ возбуждается в плоскости $z = 0$, т. е. имеет вид $j(\mathbf{r}, t) = j \cos(\omega_p t) \delta(z)$, где ω_p — частота накачки. На рассматриваемом этапе процесса можно не учитывать

воздействие сигнала на поле накачки и получить следующее выражение для компонент Лапласа функции корреляции:

$$f_{\omega_1 \omega_2}(\mathbf{r}) = \int e^{i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2} \langle \hat{\Phi}(\mathbf{r}, t_1) \hat{\Phi}(\mathbf{r}, t_2) \rangle dt_1 dt_2, \quad (14)$$

$$f_{\omega_1 \omega_2}(z) = \frac{i}{2} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)|z|} \int \left[D_{\omega_1}^R(q) \left(-\frac{i(\omega_1 \omega_2 + c^2 q^2)}{c|q|} + \Pi_{\omega_1 \omega_2} \right) D_{\omega_2}^A(q) + \right. \\ \left. + \frac{i}{\omega_1 - \omega_2} (D_{\omega_1}^R(q) - D_{\omega_2}^A(q)) \right] \frac{dq}{2\pi}, \quad (15)$$

где

$$\Pi_{\omega_1}^R = \pm \frac{\omega}{\omega_1^2 - \omega^2} \gamma^2; \quad \Pi_{\omega_2}^A = \mp \frac{\omega}{\omega_2^2 - \omega^2} \gamma^2. \quad (16)$$

$\gamma^2 = |x^{(2)} \Phi_p|^2 \rho \omega_0^{-1}$, Φ_p — поле накачки, ρ — плотность среды. Верхний знак в (16) соответствует частотам, близким к стоксовой $\omega = \omega_s = \omega_p - \omega_0$, а нижний — к антистоксовой $\omega = \omega_a = \omega_p + \omega_0$. Кинетическая часть поляризационного оператора имеет вид

$$\Pi_{\omega_1 \omega_2} = -i \frac{\omega_1 \omega_2 + \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}, \quad (17)$$

$$\omega = \omega_{s,a}.$$

Поскольку, как видно из (14), вклад в $P(\mathbf{r}, t)$ дают лишь отрицательно-частотные компоненты функции корреляции, найдем значение $f_{\omega_1 \omega_2}$ при

$$\omega_{1,2} = -\omega + \frac{\Gamma}{2} \omega_{1,2}, \quad \Gamma = \frac{\gamma^2}{\omega^2} \ll 1, \quad \omega_{1,2} \sim 1$$

$$\omega = \omega_{s,a}.$$

Имеем

$$f_{\omega_1 \omega_2}(z) = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_a, \\ i \exp \left[i \frac{\Gamma}{2} |z| (\omega_1 - \omega_2) \right] \frac{1}{\Gamma \omega (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 \omega_2 - 1)}, & \omega = \omega_s, \end{cases} \quad (18)$$

а для $P(z, t)$ методом перевала получим асимптотическое выражение при $\Gamma \left(t - \frac{|z|}{c} \right) \gg 1$:

$$P(z, t) \sim \frac{\exp \left[\Gamma \left(t - \frac{|z|}{c} \right) \right]}{(\omega_s - \omega_d)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}. \quad (19)$$

Найденное выражение является по существу решением и другой

известной проблемы квантовой оптики, а именно, задачи о спонтанном высвечивании системы возбужденных атомов, излучение которой существенно отличается от некогерентной суммы излучений отдельных атомов. Когда процесс развивается из состояния с полной инверсной заселенностью, свойства операторов, описывающих макроскопически малые объемы среды, близки к свойствам бозевских операторов, что позволяет применение изложенной техники и к этой системе.

В определенном смысле, модель ВКР является более интересной, чем популярная в квантовой оптике система двухуровневых атомов, взаимодействующих с излучением, поскольку в модели ВКР содержится механизм создания инверсной заселенности.

В дальнейшем мы предполагаем рассмотреть стационарный режим ВКР и исследовать квантовые флуктуации комбинационного сигнала. Последнее представляет интерес в связи с поисками систем, в которых можно наблюдать сжатые состояния света.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Васильев. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Ленинград, изд. ЛГУ, 1976.
2. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Физическая кинетика. М., Наука, 1979.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻԴԱՍԱԿԱՆ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

թ. Կ. ՄԵԼԻԿ-ԲԱՐԿԽՈՒԴԱՐՈՎ, Լ. Լ. ՄԻՆԱՍԻԱՆ

Ֆունկցիոնալ ինտեգրալների կիրառմամբ առաջարկված է բվազիդասական վերլուծության ստացման նդանակ բվանտային օպտիկայում: Դիտարկված է ստիպողական կոմբինացիոն ճառագայթման զարգացման պրոցեսը նախնական դաշտերի բացակայության դեպքում:

ON QUASICLASSICAL APPROXIMATION IN NONLINEAR QUANTUM OPTICS

T. K. MELIK-BARKHUDAROV, L. L. MINASIAN

An approach to quasiclassical approximation in quantum optics using functional integrals is proposed. The process of stimulated Raman radiation initiation in the absence of the input is studied.