

О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА МАСЛОВА

А. А. АСАТЯН

Ереванский государственный университет

Ю. А. КРАВЦОВ

Институт общей физики АН РФ

(Поступила в редакцию 24 февраля 1993 г.).

Рассматривается вопрос о пределах применимости метода Маслова, формулируются достаточные условия применимости метода. Полученные результаты иллюстрируются на примере распространения гауссова пучка.

В теории волновых процессов описание распространения монохроматических волн обычно сводится к решению уравнения Гельмгольца. [1]

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Одним из приближенных методов решения уравнения Гельмгольца (1) является метод Маслова [2, 3]. Несмотря на широкое применение метода [4—8], обычно при расчетах приводят условие применимости метода в виде

$$r_1 = 1/kL \ll 1, \quad (2)$$

где L — минимальный из характерных масштабов задачи. Очевидно, что условие (2) не дает четкого критерия применимости метода.

Цель данной работы — сформулировать достаточные условия применимости метода Маслова.

Типичная постановка задачи в теории волн формулируется в следующем виде: в плоскости $z=0$, $x=\xi$ задано начальное распределение поля

$$U_0(\xi) = A_0(\xi) \exp\{ik\psi_0(\xi)\}, \quad (3)$$

где $A_0(\xi)$ — начальное распределение амплитуды поля, а $\psi_0(\xi)$ — начальная фаза поля. Необходимо определить величину волнового поля в плоскости $z=z_p > 0$ (рис. 1).

Следуя работам [4—8], определим волновое поле в приближении Маслова. Опуская несложные, но громоздкие преобразования для величины волнового поля, в приближении Маслова можем написать

$$U_m(X, Z) = (ik/2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0(\xi(p_x)) \exp\{ik\psi\}}{\{\psi_0'(\xi(p_x))\}^{1/2}} dp_x, \quad (4)$$

$$\psi = \psi_0(\xi(p_x)) - \xi(p_x)p_x + Xp_x + Z(1-p_x^2)^{1/2},$$

где зависимость $\xi = \xi(p_x)$ определяется из условия $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = p_x$, а через ψ_0'' обозначена величина $\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial p_x^2}$.

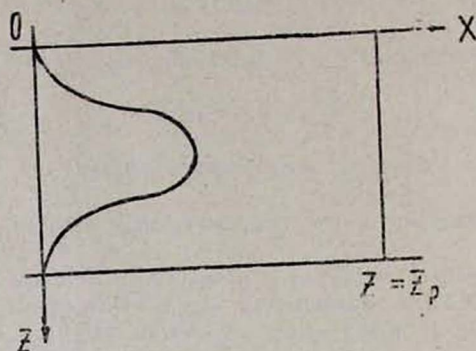


Рис. 1. Начальное распределение волнового поля в плоскости $z=0$.

С другой стороны, нетрудно получить строгое решение задачи (1), (3) [1].

$$U_0(X, Z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) \exp\{ik(\psi_0(\xi) - p_x(\xi - X) + Z\sqrt{1 - p_x^2})\} d\xi dp_x =$$

$$= \sqrt{k/2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(p_x) \exp\{ik(Xp_x + Z\sqrt{1 - p_x^2})\} dp_x, \quad (5)$$

где

$$U_0(p_x) = \sqrt{k/2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) \exp\{ik(\psi_0(\xi) - p_x \xi)\} d\xi. \quad (6)$$

Выясним, при каких условиях точное решение задачи (5) переходит в масловскую асимптотику (4). Как нетрудно убедиться, для этого перехода необходима возможность применения метода стационарной фазы к интегралу (6). Из условия стационарности фазы $\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_0(\xi) - p_x \xi) = 0$, получаем

$$p_{xst} = \frac{\partial \psi_0(\xi)}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Применение метода стационарной фазы к интегралу (6) дает

$$U_0(p_x) = \sqrt{i} A_0(\xi(p_x)) \exp\{ik(\psi_0(\xi(p_x)) - p_x \xi(p_x))\} / \{\psi_0''(\xi(p_x))\}^{1/2}. \quad (8)$$

Подстановка (8) в (5) приводит к масловской асимптотике (4). Таким образом, условия применимости масловской асимптотики (4) определ-

яются условием применимости метода стационарной фазы к интегралу (6). Применение метода стационарной фазы к интегралу (6) требует, чтобы в окрестности стационарной точки $p_{xst} = \frac{\partial \psi_0(\xi)}{\partial \xi}$ амплитуда $A_0(\xi)$ изменялась достаточно медленно, т. е. чтобы имело место неравенство

$$a_f \left| \frac{\partial A_0}{\partial \xi} \right| \ll A_0, \quad (9)$$

где

$$a_f = \{2/k\psi''_0(\xi)\}^{1/2} \quad (10)$$

есть френелевский масштаб. Условия применимости метода (9), (10) фактически определяют ограничения на распределение амплитуды в начальной плоскости $Z=0$.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере распространения сфокусированной гауссовой волны. Пусть в начальной плоскости $Z=0$ распределение поля имеет вид рис. 1

$$U_0(\xi) = \exp\{-\xi^2/W^2 - ik\xi^2/2F\}. \quad (11)$$

Здесь W — размер гауссового окна, F — фокусное расстояние. После подстановки (11) в (5) получим точное решение задачи в виде

$$U_\tau(X, Z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2/W^2 + ik\xi\psi) d\xi dp_x, \quad (12)$$

где $\psi = Xp_x + Z\sqrt{1-p_x^2} - \xi p_x - \xi^2/2F$.

Для нахождения масловской асимптотики необходимо вычислить интеграл

$$\tilde{U}_0(p_x) = \sqrt{k/2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\xi^2/W^2 - ik(\xi^2/2F + p_x\xi)\} d\xi \quad (13)$$

методом стационарной фазы. Фазовая функция интеграла (13) имеет вид

$$\psi = -\xi^2/2F - \xi p_x. \quad (14)$$

Из условия стационарности фазы $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0$ находим

$$\xi_{st} = -Fp_x, \quad \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\xi_{st}} = -1/F. \quad (15)$$

Применение метода стационарной фазы к интегралу (13) приводит к выражению

$$\tilde{U}_m(p_x) = \sqrt{F/i} \exp(-F^2 p_x^2 / W^2 + ikF p_x^2). \quad (16)$$

После подстановки выражения (16) в (5) получим масловскую асимптотику задачи в виде

$$U_M(X, Z) = \sqrt{\frac{kF}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-F^2 p_x^2 / W^2 + ik(Fp_x^2/2 + p_x X + Z\sqrt{1-p_x^2})\} dp_x \quad (17)$$

Переход от точного решения (12) к масловской асимптотике (17) возможен тогда, когда имеет место неравенство (9), т. е., если амплитудный множитель достаточно слабо меняется в окрестности стационарной точки. Условие (9) приводит к требованию

$$\mu_2 = \frac{2F}{kW^2} \ll 1. \quad (18)$$

Физически это означает, что для применимости метода Маслова достаточно, чтобы френелевский радиус $a_f = \sqrt{1/F}$ был меньше размера гауссова окна W .

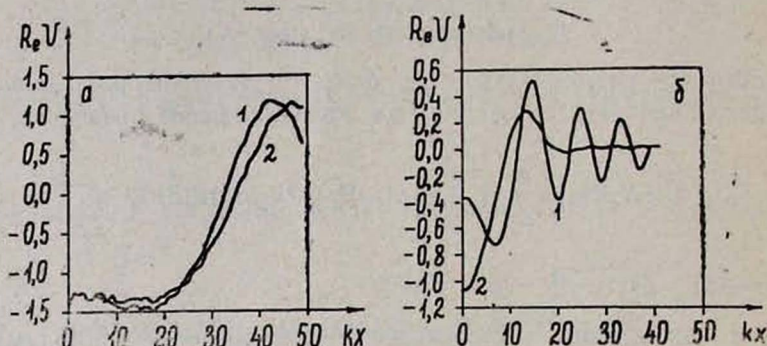


Рис. 2. Расчет величины волнового поля в плоскости $kz=280$: а) параметры задачи составляют $kW=60$, $kF=600$, график 1 соответствует строгому решению, график 2—масловскому приближению; б) параметры задачи составляют $kW=6$, $kF=60$, график 1 соответствует строгому решению, график 2—масловскому приближению.

На рис. 2а приведены графики зависимости величины волнового поля ($Re U$) точного решения (12) (график 1) и масловской асимптотики (16) (график 2) в плоскости $kz=280$ при следующих значениях параметров волны: $kF=600$, $kW=60$. При этих значениях малые параметры задачи $\mu_{1,2}$ соответственно составляют $\mu_1=1/60$, $\mu_2=1/3$. Как показывают данные расчеты, метод Маслова при данных значениях параметров задачи дает приемлемые результаты (имеет место требование (18)), в то время как при значениях $kF=60$, $kW=6$ приближение Маслова (график 2 рис. 2б) неприменимо. Параметры малости соответственно составляют $\mu_1=1/6$, $\mu_2=3$.

Установленный в работе критерий применимости (9) позволяет в расчетах вместо многократного интегрирования быстроосциллирующего интеграла (5) (что на практике требует большого машинного времени [9]) свести задачу к однократному интегралу (4).

Полученные результаты могут также оказаться полезными при рассмотрении задачи о пределах применимости метода Маслова при отсутствии точного решения, а также для различных интегральных-асимптотических методов, таких, как метод интерференционных интегралов Ю. И. Орлова [10], метод квазичастиц [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. Теория волн. М., Наука, 1980.
2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., Наука, 1976.
3. Ю. А. Кравцов. Акуст. журн., 4. 1 (1968).
4. В. П. Маслов. Асимптотические методы и теория возмущений. М., Наука, 1988.
5. Д. С. Лукин, Е. А. Палкин. В сб. Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн. М., Наука, 1976, с. 149.
6. Д. С. Лукин, А. С. Мартынов, Ю. Г. Спиридонов. В сб. Проблемы радиофизики и электроники. Куйбышев, 1976, с. 5.
7. Д. С. Лукин, Ю. Г. Спиридонов. В сб. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн. М., 1971, с. 45.
8. А. А. Асатрян, А. Ю. Гивенталь, Ю. А. Кравцов. 13-ая Всесоюзная школа операторов в функциональных пространствах. Тезисы докл., Куйбышев. 1988, с. 16.
9. Л. И. Турчак. Основы численных методов. М., Наука, 1987.
10. Ю. И. Орлов. Труды МЭИ, 119, 82 (1971).
11. N. Marcuvitz, Rad. Sci. 19, № 5, 1139 (1984).

LIMITS OF APPLICABILITY OF MASLOVS METHOD

A. A. ASATRYAN, YU. A. KRAVTSOV

The applicability of Maslovs method is considered and the sufficient conditions of applicability are found.

ՄԱՍԼՈՎԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԸ

Ա. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, ՅՈՒ. Ա. ԿՐԱՎՏՈՎ

Քննարկվում են Մասլովի մեթոդի կիրառության սահմանները, և ձևակերպվում են մեթոդի կիրառության բավարար պայմանները: Ստացված արդյունքները կիրառվում են դառայան փնջի տարածման օրինակի վրա: