

РЕКУРРЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА
КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ОТ
МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

О. В. БАГДАСАРЯН, А. В. ДАРЬЯН

НПО «Лазерная техника» ЕГУ

(Поступила в редакцию 5 июня 1991 г.)

Получены аналитические выражения, позволяющие рекуррентным образом вычислять коэффициенты прохождения и отражения от многослойных сред. Отличительной особенностью предлагаемых выражений является возможность, по ходу вычисления, получить распределение амплитуды поля в слоях многослойной среды.

Исследование особенностей отражения и прохождения плоских электромагнитных волн через слоистые среды имеет большое прикладное значение. Этому вопросу посвящено большое число работ—как теоретических, так и прикладных. Достаточно полный обзор исследований в этом направлении проведен в работах [1—4]. Одним из центральных вопросов теории является определение коэффициентов прохождения и отражения от подобных сред. Как известно, соответствующие выражения для двух и более слоев чрезмерно громоздки [1] и на практике для вычислений применяют матричные и рекуррентные выражения [1—4]. В случае большого числа различных слоев предпочтительными являются рекуррентные выражения, которые и широко используются в настоящее время [см., напр., 5]. Но как матричные, так и известные рекуррентные выражения не позволяют получить информацию о поведении амплитуды поля в слоях. В то же время подобная информация может быть полезной для прогнозирования изменений коэффициента отражения (прохождения) в зависимости от параметров среды: толщины слоев, их относительных диэлектрических проницаемостей, числа слоев.

Ниже будут получены рекуррентные выражения, позволяющие описывать также поведение амплитуды поля плоской волны в слоях многослойной среды.

1. Основные соотношения

В настоящей работе решения волнового уравнения в слоях ищутся не в виде встречных волн, как принято, а в виде единого выражения:

$$E(z, t) = U(z) \cos[\omega t - S(z)], \quad (1)$$

где $U(z)$ и $S(z)$ —действительные функции, описывающие распреде-

ние по координате, соответственно, амплитуды и фазы волны. Такой поиск решения волнового уравнения предложен в [6, 7].

Подстановка (1) в одномерное волновое уравнение сводит его к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU}{dk_0 z} = Y, \quad \frac{dY}{dk_0 z} = \frac{\Pi^2 - \varepsilon U^4}{U^3}, \quad (2)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$, ε — диэлектрическая проницаемость вещества, а Π — константа, пропорциональная плотности потока энергии волны [6]. Интеграл системы (2) равен

$$C = Y^2 + \frac{\Pi^2}{U^2} - \varepsilon U^2, \quad (3)$$

где C — константа интегрирования, пропорциональная плотности энергии электромагнитной волны.

В случае линейного однородного слоя ($\varepsilon = \text{const}$) система (2) интегрируется в замкнутом виде, а расчет многослойных сред может быть сведен к рекуррентной процедуре, учитывающей непрерывность функций $U(z)$, ее производной $Y(z)$ и потока Π на границе раздела двух сред [8, 9].

2. Вывод рекуррентных соотношений

Рассмотрим плоскую слоистую среду, состоящую из N слоев с толщинами l_i и диэлектрическими проницаемостями ε_i ($i=1, 2, \dots, N$). При падении плоской волны слева на рассматриваемую слоистую среду (рис. 1) на выходе из нее, в правом полупространстве, имеем однородную бегущую волну. Как показано в [8], для нее выполняется условие постоянства амплитуды, т. е. $U(z) = \text{const}$, $Y(z) = 0$. Амплитуду волны на выходе из слоистой среды ввиду линейности задачи, можно взять произвольной. Тогда для решения задачи можно задаться граничными условиями

$$U(l_1) = U, \quad Y(l_1) = 0.$$

По заданному $U(l_1)$ вычисляется константа

$$\Pi = U^2(l_1) \sqrt{\varepsilon_0}, \quad (4)$$

которая неизменна во всех слоях (при отсутствии поглощения) [8]. Что касается константы C , то она меняется от слоя к слою, но постоянна в каждом слое. Для правого полупространства, с учетом того, что $Y(l_1) = 0$, из (3) получаем

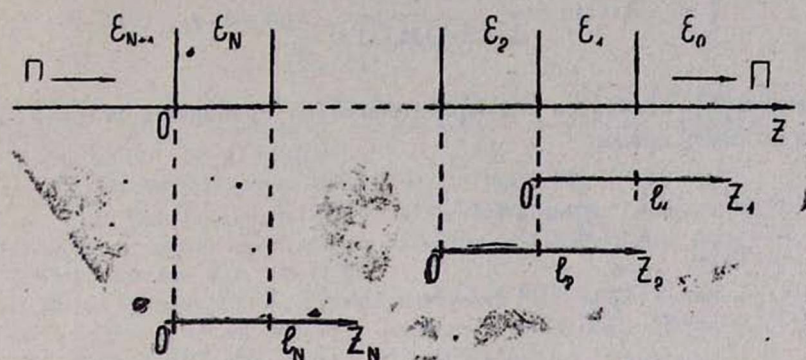
$$C_0 = 2\varepsilon_0 U^2(l_1). \quad (5)$$

В силу непрерывности $U(z)$ и $Y(z)$ на границе слоев, в частности,

i -го и $i-1$ -го, из (3) получаем рекуррентное соотношение для вычисления константы C

$$C_i = C_{i-1} + (\varepsilon - \varepsilon_{i-1}) l_i^2 (l_i), \quad (6)$$

где $U(l_i)$ — это амплитуда волны на правой границе i -го слоя ($z = l_i$).



Интегрируя первое уравнение системы (2) с учетом (3) в случае однородного i -го слоя без потерь с диэлектрической проницаемостью ε_i и учитывая непрерывность $U(z)$, $Y(z)$ и Π , получим для поведения амплитуды волны в i -ом слое ($i=1, 2, \dots, N$)

$$U^2(z_i) = \frac{1}{2\varepsilon_i} \left\{ C_i - \sqrt{C_i^2 - 4\varepsilon_i \Pi^2} \sin \left[\varphi(l_i) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sqrt{\varepsilon_i} k_0 (l_i - z_i) \right] \right\}. \quad (7)$$

где l_i — координата выходной (неосвещенной) стороны слоя, z — текущая координата в слое (м.с. рисунок), $\varphi(l_i)$ — начальная фаза, определяемая амплитудой $U(l_i)$ и знаком производной $Y(l_i)$ на выходной стороне слоя:

$$\varphi(l_i) = \begin{cases} \text{Arc sin } \frac{C_i - 2\varepsilon_i U^2(l_i)}{\sqrt{C_i^2 - 4\varepsilon_i \Pi^2}}, & \text{при } Y(l_i) \geq 0, \\ \pi - \text{Arc sin } \frac{C_i - 2\varepsilon_i U^2(l_i)}{\sqrt{C_i^2 - 4\varepsilon_i \Pi^2}}, & \text{при } Y(l_i) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Дифференцированием (7) легко увидеть, что знак Y в точке l_i определяется выражением (для слоев с $i=2, 3, \dots, N$)

$$\text{sign}[Y(l_i)] = \text{sign}[\cos \varphi_{i-1}(0)],$$

где

$$\varphi_{i-1}(0) = \varphi(l_{i-1}) - 2 \sqrt{\varepsilon_{i-1}} k_0 l_{i-1}, \quad (9)$$

т. е. $\varphi_{i-1}(0)$ — фаза на левой границе $(i-1)$ слоя. Тогда окончательно для фазы $\varphi(l_i)$ можем записать $(i=2, 3, \dots, N)$:

$$\varphi(l_i) = \begin{cases} \text{Arcsin} \frac{C_i - 2\varepsilon_i U^2(l_i)}{\sqrt{C_i^2 - 4\varepsilon_i \Pi^2}}, & \text{при } \cos \varphi_{i-1}(0) \geq 0, \\ \pi - \text{Arcsin} \frac{C_i - 2\varepsilon_i U^2(l_i)}{\sqrt{C_i^2 - 4\varepsilon_i \Pi^2}}, & \text{при } \cos \varphi_{i-1}(0) < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Значение $\varphi(l_1)$ находится непосредственно из граничных условий на выходе из слоистой среды

$$\varphi(l_1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{при } \varepsilon_1 > \varepsilon_0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{при } \varepsilon_1 < \varepsilon_0. \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что из (7) при $i=1$ можно получить известное выражение для поведения амплитуды поля в одиночном слое [10].

3. Алгоритм вычисления

Итак, мы можем построить следующую рекуррентную процедуру:

- а) задаемся произвольным значением амплитуды $U(l_1)$ бегущей волны в правом полупространстве (к примеру $U(l_1)=1$);
- б) вычисляем по формуле (5) константу C_0 ;
- в) вычисляем C_1 по формуле (6);
- г) вычисляем $\varphi(l_1)$ по формуле (11);
- д) вычисляется $U(z_1)$ по формуле (7).

Далее последовательно по выражениям (6, 9, 10, 7) вычисления проводятся для всех остальных слоев, начиная с $i=2$ до $N+1$, т. е. включая и левое полупространство. Полученное распределение амплитуды поля в левом полупространстве позволяет определить модуль коэффициента отражения по полю:

$$|R| = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} \Big|_{z < 0} = \sqrt{\frac{C_{N+1} - 2\Pi \sqrt{\varepsilon_{N+1}}}{C_{N+1} + 2\Pi \sqrt{\varepsilon_{N+1}}}}.$$

Ввиду отсутствия потерь в слоях для коэффициента прохождения имеем

$$|T| = \sqrt{1 - |R|^2}.$$

Заметим, что для вычисления коэффициентов отражения и прохождения (без распределения амплитуды поля по слоям) достаточно вычислять амплитуду поля по (7) только на границах слоев.

В заключение авторы выражают надежду, что предложенный метод расчета слоистых сред получит распространение ввиду своей простоты и будет полезен также в методическом плане.

Авторы благодарны участникам теоретического семинара НПО «Лазерная техника» Ереванского государственного университета за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, М., 1957.
2. Элаши Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах. Обзор. Труды ИИЭР, 64, 22 (1976).
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд. Наука, М., 1973.
4. J. R. Watt, Electromagnetic Waves in Stratified Media. London, 1962.
5. I. Ohlidal, Immersion spectroscopic reflectometry of multilayer systems. I. Theory, J. Opt. Soc. Am., A, 5, 459 (1988).
6. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. Изд. Наука, М., 1975.
7. Силин В. П. ЖЭТФ, 53, № 5 (11), 1662 (1967).
8. Багдасарян О. В., Дарьян А. В. Метод фазовой плоскости в теории распространения электромагнитных волн. МТСНТ по радиотехнике «Излучение и распространение электромагнитных волн», Изд. ЕрПИ, Ереван, 64, 1988.
9. Багдасарян О. В., Дарьян А. В. Прохождение плоской электромагнитной волны через слоистые структуры. МТСНТ по радиотехнике «Конструирование радио-электронных средств», Изд. ЕрПИ, Ереван, 67, 1990.
10. Багдасарян О. В., Лебедев А. М., Пермяков В. А. Закономерности прохождения плоской Н-волны через слой диэлектрика с отрицательной нелинейностью. Сб. трудов НИИ ФКС ЕГУ: Нелинейные оптические взаимодействия, Изд. ЕГУ, Ереван, 169 (1987).

ՌԵԿՐԵՆՏ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻՑ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՄԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՄԱՐ

Հ. Վ. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ա. Վ. ԴԱՐՅԱՆ

Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ, որոնք թույլ են տալիս ռեկուրենտ ձևով հաշվարկել բազմաշերտ միջավայրերից անդրադարձման և թափանցման գործակիցները: Առաջարկվող արտահայտությունների առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ հաշվարկի ընթացքում հնարավոր է ստանալ նաև դաշտի ամպլիտուդի բաշխվածությունը բազմաշերտ միջավայրի յուրաքանչյուր շերտում:

RECURRENT EXPRESSIONS FOR CALCULATION OF REFLECTIVITY FROM MULTILAYER MEDIA

H. V. BAGDASARYAN, A. V. DARYAN

Recurrent expressions for calculations of transmissivity and reflectivity from multilayer media are obtained. A distinctive feature of proposed expressions is the possibility to obtain the distribution of field amplitude in each layer of multilayer medium.