

УДК 535.3:361.621.371:551.576.593

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТОВ И УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ МИ

Г. М. АЙВАЗЯН

Институт радиопизики и электроники Армении
(Поступила в редакцию 21 марта 1991 г.)

Исследованы алгоритмы и разработана универсальная программа для расчетов на ЭВМ дифракции электромагнитного излучения сферическими частицами в задаче ослабления и радиолокационного отражения ММ и СВММ волн в облаках.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что в последние десятилетия развитие вычислительной техники позволило преодолеть многие трудности, связанные с расчетами на ЭВМ по теории дифракции электромагнитного излучения на сферических частицах по теории Ми [1—4], остались трудности, связанные с расчетами в экстремальных условиях: для весьма малых и одновременно больших значений комплексного показателя преломления частицы — $m = \tilde{n} - i\kappa$ и безразмерного параметра дифракции — $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$, где

r — радиус частицы, λ — длина волны. Указанная задача тесно связана с расчетами распространения миллиметровых (ММ) и субмиллиметровых (СВММ) волн через облака, состоящих из мелких (от 1 до 45 мкм) и сверхкрупных (от 85 до 1500 и более мкм) капель воды, а в некоторых случаях и частиц льда. Комплексный показатель преломления воды и льда в этих диапазонах, как известно, меняется от весьма малых до величин порядка $m = 10 - 10i$. Параметр ρ при этом меняется от $\approx 0,001$ до 400 и более. Анализ имеющихся алгоритмов расчетов по теории Ми показал, что каждый из них хорошо работает в определенных ограниченных областях изменений ρ и m .

Ниже приводится описание нашей универсальной программы «ORION», которая позволяет преодолеть вышеуказанные трудности и обеспечить высокую точность счета коэффициентов Ми для выше рассмотренных диапазонов изменения ρ и m . Естественно, программу «ORION» можно использовать и для других диапазонов длин волн и размеров частиц, лишь бы соблюдались условия задачи: весьма малые и большие значения ρ и m .

§ 1. Расчет функций Ринкати-Бесселя первого рода

Для коэффициентов Ми — a_n и b_n , входящих в факторы эффективности, ослабления — $K_d(m, \rho)$, рассеяния — $K_s(m, \rho)$, поглощения —

$K_n(m, \rho)$ и радиолокационного отражения — $K_{\text{рл}}(m, \rho)$ [1–3] предложено множество выражений. Мы используем выражение для a_n и b_n , куда входит минимальное количество специальных функций [3–5]

$$a_n = \frac{\left[A_n(m, \rho) / m + \frac{n}{\rho} \right] \psi_n(\rho) - \psi_{n-1}(\rho)}{\left[A_n(m, \rho) / m + \frac{n}{\rho} \right] \zeta_n(\rho) - \zeta_{n-1}(\rho)}, \quad (1)$$

$$b_n = \frac{\left[m \cdot A_n(m, \rho) + \frac{n}{\rho} \right] \psi_n(\rho) - \psi_{n-1}(\rho)}{\left[m \cdot A_n(m, \rho) + \frac{n}{\rho} \right] \zeta_n(\rho) - \zeta_{n-1}(\rho)},$$

где $\psi_n(\rho)$ — функция Риккати-Бесселя первого рода действительного аргумента, $\zeta_n(\rho) = \psi_n(\rho) + i\chi_n(\rho)$ — функция Риккати-Бесселя третьего рода, где $\chi_n(\rho)$ — функция Риккати-Бесселя второго рода действительного аргумента, $A_n(m, \rho)$ — логарифмическая производная от функции Риккати-Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Математическая наука выработала критерии точного счета для различных функций, входящих в (1). Ниже исследуются алгоритмы, позволившие в программе «ORION» реализовать высокую точность при высокой скорости счета.

1. *Расчет прямой рекурсией.* Во всех ранних программах, связанных с расчетами по теории Ми, функция Риккати-Бесселя первого рода $\psi_n(\rho)$ высших порядков n рассчитывались прямой рекурсией (расчет ведется от малых значений n к большим) по известной рекуррентной формуле [1, 3]. Однако в расчетах по формулам Ми приходится иметь дело с большими значениями ρ и n . Поэтому последовательное применение рекуррентной формулы приводит к накоплению ошибок при расчетах $\psi_n(\rho)$, в результате чего при больших ρ и n пользоваться рекуррентной формулой становится невозможно. В некоторых случаях, для расчетов функций $\psi_n(\rho)$ высших порядков n в ЭВМ вместо одинарной точности (15 точных знаков после запятой) применяется двойная точность счета (31 точных знаков после запятой). Однако двойная точность счета особого выигрыша не дает, но приводит к значительному увеличению расчетного времени. Поэтому для больших значений ρ и n наступает предел, где разумное увеличение точности счета $\psi_n(\rho)$ не может обеспечить конечную точность $K_l(m, \rho)$ в пределах 10^{-3} — 10^{-4} . Тогда следует искать другие алгоритмы счета $\psi_n(\rho)$.

Исследователи, желающие использовать прямую рекурсию, должны знать точность счета $\psi_n(\rho)$ прямой рекурсией. Наши исследования показали, что при одинарной точности счета на ЭВМ, для значений ρ из интервала $0,001 < \rho < 0,1$ точность плохая, для $n=1$ составляет 10^{-6} — 10^{-9} , для $n=2$ — порядка 10^{-6} — 10^{-9} , а при $n=3$ в пределах 10^{-1} — 10^{-3} .

Для p в интервале $0,5 < p < 5$ при $n=1$ точность хорошая— 10^{-13} — 10^{-14} , а при $n=2$ точность составляет $\approx 10^{-12}$ — 10^{-14} . По мере увеличения n точность постепенно падает и при $n \approx 9$ составляет 10^{-10} . Далее, с увеличением величины p до $p=100$ точность стабилизируется и составляет 10^{-13} — 10^{-14} для всех значений n до $n \approx p$. В области $100 < p < 200$ точность несколько ухудшается и составляет 10^{-12} — 10^{-13} . В области $p > 200$ для всех значений n точность резко падает и при $p \approx 300$ составляет 10^{-1} — 10^{-2} для любых значений n до $n \approx p$. При двойной точности счета на ЭВМ наблюдается увеличение точности на величину 10^{-2} — 10^{-3} по сравнению с расчетами с одинарной точностью. При $p > 200$ пользоваться прямой рекурсией для расчетов $\psi_n(p)$ с удовлетворительной точностью вообще невозможно.

В случае расчетов $\psi_n(p)$ прямой рекурсией следует остерегаться резкого уменьшения точности счета $\psi_n(p)$ для определенных значений p . Это связано с близостью p к числу $\pi/2$ или к кратному π . Известно, что $\psi_n(p)$ зависит от $\sin p$ и $\cos p$, поэтому близость p к $\pi/2$ или π может привести к близости $\psi_n(p)$ к нулю, где ЭВМ очень плохо считает. Это может привести к значительным ошибкам [4]. Кроме того, чем меньше n , по сравнению с p , тем выше точность счета $\psi_n(p)$. Точность резко ухудшается, когда $n \gg p$. В области $n \approx 1,3p$ точность вычислений $\psi_n(p)$ еще велика и это ориентировочный предел для n , до которого следует проводить вычисления, чтобы обеспечить высокую точность сходимости рядов Ми [6].

2. Расчет обратной рекурсией. Функция $\psi_n(p)$ —убывающая функция при возрастании n , поэтому по правилам математики точного счета рассчитывать ее необходимо обратной рекурсией [8, 9]. Для вычислений $\psi_n(p)$ опять применяется рекуррентная формула, только счет ведется от очень больших значений $n = N^*$ и получаются значения $\psi_n(p)$ последовательно для всех малых значений n до $n=1$. В отличие от прямой рекурсии, здесь требуется ЭВМ с большой памятью. Это связано с необходимостью введения поправочных коэффициентов и окончательных расчетов всех N^* величин $\psi_n(p)$.

В работах [8, 9] указывается, что область использования обратной рекурсии ограничена снизу значением $p=1$. В нашей программе «ORION» используется несколько усовершенствованная схема расчета $\psi_n(p)$, но сохраняются основные положения, изложенные в [8, 9]. Поэтому обратную рекурсию для $\psi_n(p)$ в нашей программе можно использовать и для $p < 1$.

Наши исследования показали, что при расчетах $\psi_n(p)$ обратной рекурсией при одинарной точности счета на ЭВМ, в области p от 0,001 до 0,5, точность составляет 10^{-14} — 10^{-15} независимо от величины n , но $p \approx n$. В области $0,5 < p < 10$ точность равна 10^{-13} — 10^{-14} , а с увеличением n точность постепенно уменьшается. В области $10 < p < 100$ точность составляет 10^{-11} — 10^{-13} , а при больших $p \approx 120$ точность составляет 10^{-9} . В области $200 < p < 400$ точность стабильна и составляет 10^{-10} —

10^{-11} и лишь для случаев $p > p$ точность 10^{-9} . Время, затраченное на расчеты $\psi_n(p)$ обратной рекурсией, несколько больше, чем при расчетах прямой рекурсией, однако в точности счета выигрыш несомненен.

3. *Расчет алгоритмом Ленца.* Функцию $\psi_n(p)$ можно рассчитать и алгоритмом Ленца [10]. По сравнению с обратной рекурсией этот расчет гораздо более медленная процедура, поскольку $\psi_n(p)$ рассчитывается не рекуррентной формулой, а отдельно для каждого отдельного значения n . Преимущество при расчетах алгоритмом Ленца [10] заключается в том, что точность счета задается заранее исследователем, и она может быть сколько угодно большой. Однако, расчеты $\psi_n(p)$ алгоритмом Ленца отнимают очень много расчетного времени.

Учитывая все вышесказанное, в программе «ORION» используется обратная рекурсия при расчетах $\psi_n(p)$.

§ 2 Расчет функции Риккати-Бесселя второго рода

1. *Расчет прямой рекурсией.* Во всех до сих пор выполненных расчетах функция Риккати-Бесселя второго рода $\chi_n(p)$ вычислялась прямой рекурсией. Это связано с характером самой функции $\chi_n(p)$, представляющей возрастающую функцию от порядка n и требующей, согласно правилам математики точного счета—расчетов прямой рекурсией. Исследования показали, что по сравнению с другими цилиндрическими функциями, функция $\chi_n(p)$ наиболее проста в расчетах. Оказывается, при расчетах прямой рекурсией с какой точностью считает ЭВМ (одинарной или двойной), с такой же точностью получаются значения $\chi_n(p)$ —соответственно 10^{-15} или 10^{-31} . С увеличением и преобладанием n над p , точность расчетов $\chi_n(p)$ постоянно ухудшается. В нашей программе «ORION» используется одинарная точность счета ЭВМ, поскольку точность 10^{-14} — 10^{-15} нас вполне устраивает.

Одна неприятность может наблюдаться при расчетах $\chi_n(p)$ прямой рекурсией. Известно, что $\chi_n(p)$ разных порядков n выражается через $\sin p$ и $\cos p$, поэтому, при близости p к $\pi/2$ или значению, кратному π , может возникнуть ошибка из-за близости $\chi_n(p)$ к нулю (машина плохо считает в области нуля). Для этих случаев в ЭВМ можно предусмотреть программу, исключающую возникновение подобных ситуаций.

2. *Расчет обратной рекурсией вместе с прямой.* Обратной рекурсией [8, 9] вычисляются значения $J_{-1+1/2}(p)$ и $J_{1+1/2}(p)$. Это означает, что точно определены начальные значения для функций Бесселя второго рода с полуцелым индексом $y_{1/2}(p) = -J_{-1+1/2}(p)$ и $y_{1+1/2}(p) = J_{1+1/2}(p)$. Затем по рекуррентной формуле прямой рекурсии вычисляются все последующие значения $y_{n+1/2}(p)$ ($\chi_n(p) = -p \cdot y_n(p) = -\sqrt{\frac{p}{2}} y_{n+1/2}(p)$).

Совмещение двух методов позволяет повысить точность счета $\chi_n(\rho)$ и избежать вышеуказанных ошибок.

3. *Расчет алгоритмом Ленца.* Другой метод точного счета $\chi_n(\rho)$ предложен в [12]. Используя уравнение сферической функции Бесселя, согласно Абрамовичу [11] (10.1.31) и алгоритм Ленца [10], можно рассчитать значения $\chi_n(\rho)$. Подробно этот алгоритм счета описан в [10].

Завершая рассмотрение расчетов $\chi_n(\rho)$ следует отметить, что какую бы точность счета на ЭВМ одинарную или двойную ни брать, прямая рекурсия может привести к неточности счета. Согласно исследованиям Ленца [10] подобная нестабильность в расчетах $y_n(\rho)$ может наблюдаться в 19-м порядке числа, когда $m=10-10i$, где после некоторого провала наблюдается опять переход к стабильным результатам, и в 99-м когда $m=100-100i$. Поскольку подобные значения в наших расчетах встречаются редко, нет оснований для опасения при расчетах $\chi_n(\rho)$ прямой рекурсией.

§ 3. Расчет логарифмической производной от функции Риккати-Бесселя первого рода

Логарифмическая производная от функции Риккати-Бесселя первого рода мнимого аргумента $A_n(y)$ [3]

$$A_n(y) = \frac{d}{dy} \ln \psi_n(y) = \frac{\psi'_n(m, \rho)}{\psi_n(m, \rho)}, \quad (2)$$

впервые введена в практику расчетов Инфельдом [13] и затем сразу же нашла применение в работах [14, 15]. В работе [16] рассматриваются две логарифмические производные—реального и мнимого аргумента, а в работах [3, 4] использовалась одна функция $A_n(y)$ мнимого аргумента для расчетов коэффициентов Ми a_n и b_n . Введение в практику расчетов $A_n(y)$ явилось прогрессивным шагом, намного ускорившем расчеты по теории Ми.

1. *Расчет прямой рекурсией.* Первое подробное исследование функции $A_n(y)$ выполнено в [3], где расчеты проводились прямой рекурсией.

Как показали исследования ряда авторов, функция $A_n(y)$ не так уж проста в расчетах, как это кажется с первого взгляда. При расчетах прямой рекурсией $A_n(y)$ избирательно ошибочна при малых ρ и n (см. [17]), а также для больших значений m , ρ и n (см. [3]). В этом отношении функция $A_n(y)$ резко отличается от функций $\psi_n(\rho)$ и $\chi_n(\rho)$, для которых трудности связаны только с расчетами для больших значений ρ и n . Кроме того, точность счета $A_n(y)$ зависит от значения комплексного показателя преломления m , в особенности от показателя k .

Наши исследования показали, что для малых значений k в m ($m=1,72-0,1i$) при ρ из интервала $0,001 < \rho < 0,05$ точность счета

$A_1(y)$ составляет 10^{-10} как для действительной, так и мнимой частей $A_1(y)$, а для $A_2(y) \approx 10^{-3} - 10^{-5}$. С возрастанием ρ точность расчета $A_n(y)$ увеличивается до 10^{-13} для $0,05 < \rho < 3$, а при $A_2(y)$ и т. д. точность уменьшается почти на 10^{-1} при уменьшении n на каждую единицу. Для области $\rho > 3$ и до $\rho \approx 50$ точность стабилизируется и составляет $10^{-10} - 10^{-11}$ для всех значений $n \approx \rho$. Для $\rho \approx 100 - 400$ точность составляет $10^{-8} - 10^{-10}$ при любых $n \approx \rho$, причем с увеличением n точность несколько ухудшается. Для $n > \rho$ точность составляет примерно $10^{-6} - 10^{-7}$. Все вышеуказанное относится как к действительной, так и к мнимой частям $A_n(y)$.

Точность расчета сильно отличается для больших значений κ в m ($m = 1,28 - 1,37i$). Так, для ρ из интервала $0,001 < \rho < 0,01$ точность расчетов $A_1(y)$ составляет $10^{-7} - 10^{-10}$, а для $A_2(y) \approx 10^{-3} - 10^{-6}$. Для $0,01 < \rho < 0,5$ точность для $A_1(y)$ составляет $10^{-11} - 10^{-13}$ и с возрастанием n постепенно уменьшается и при $n = 5$ точность $10^{-6} - 10^{-7}$. Для $1 < \rho < 50$ точность стабилизируется и для $A_1(y)$ составляет $10^{-13} - 10^{-14}$. С увеличением n точность постепенно уменьшается до $10^{-10} - 10^{-11}$ для $\rho \approx n$. Для $\rho \approx 70$ точность счета сильно ухудшается при любых n и использовать прямую рекурсию для вычислений $A_n(y)$ уже невозможно. Применение двойной точности счета на ЭВМ несколько улучшает точность счета, но не намного $\approx 10^{-1} - 10^{-2}$.

Вопрос зависимости точности счета $A_n(y)$ от величины κ исследован в [18, 19]. Наши расчеты показали, что точность счета $A_n(y)$ зависит одновременно от ρ и n , и чем меньше величина κ в m , тем для больших ρ и n правомочно использование прямой рекурсии для $A_n(y)$. Указанное относится к случаю $n < \rho$. При $n \approx \rho$ и $n > \rho$ точность опять резко ухудшается.

2. Расчет обратной рекурсией. Для устранения ошибок счета $A_n(y)$ прямой рекурсией можно использовать обратную рекурсию. В работе [5] предложен алгоритм расчетов $A_n(y)$ обратной рекурсией обычной рекуррентной формулой, без введения корректировочных коэффициентов [8, 9].

Результаты наших исследований по алгоритму [5] показали, что точность счета сильно зависит от κ в m , а также от ρ и n . Для малых значений κ в m ($m = 1,78 - 0,1i$) и для значений ρ от 0,01 до 5 точность счета весьма стабильна (при одинарной точности счета ЭВМ) и составляет $10^{-14} - 10^{-15}$ как для мнимой, так и действительной частей $A_n(y)$. Для $\rho \approx 10$ точность несколько улучшается и составляет $10^{-10} - 10^{-13}$. Для $\rho \geq 30$ использовать алгоритм [5] невозможно из-за резкого ухудшения точности счета.

Для больших значений κ в m ($m = 1,28 - 1,37i$) и для малых $\rho \approx 0,001$ до $\rho \approx 3$ точность счета $A_n(y)$ при расчетах по алгоритму [5] очень высока и составляет $10^{-14} - 10^{-15}$. Начиная с $\rho = 3$ и с возрастанием ρ точность счета $A_n(y)$ постепенно ухудшается. Так, при $\rho = 5$, когда $n \approx \rho$, точность составляет $10^{-13} - 10^{-14}$ при $\rho = 50 \approx 10^{-7} - 10^{-13}$, а при $\rho = 100 \approx 10^{-6} - 10^{-9}$. При $n > \rho$ точность счета $A_n(y)$ резко ухудшается независимо от величины ρ .

По-видимому, точность счета $A_n(y)$ можно намного улучшить, если использовать в расчетах коррекцию коэффициентов [8, 9]. Подобный расчет, возможно, применялся в расчетах [17], иначе невозможно объяснить точные расчеты $A_n(y)$ для очень больших p , правда при небольших x и m .

3. Расчет алгоритмом Ленца. Намного целесообразнее обратиться к расчету $A_n(y)$ алгоритмом Ленца [10], который дает существенное преимущество в точности счета. Подробное описание алгоритма Ленца приводится в [10] и в статьях других авторов. Однако для конкретных расчетов пришлось использовать ряд математических приемов и преобразований, позволивших реализовать высокую точность при достаточно большой скорости счета. Подробное описание нашей программы «ORION» приводится в работе [20].

В программе «ORION» для вычислений $A_n(y)$ выбрана одинарная точность счета. Однако за счет этого увеличена точность счета самой функции $A_n(y)$ алгоритмом Ленца до 10^{-20} .

Наши исследования показали, что если для $p > 10$ вместо одинарной точности счета использовать оптимизирующую программу ЕС-1045, то примерно в два раза можно ускорить время счета $A_n(y)$.

Таблица 1

Результаты сравнения расчетов различными алгоритмами*

p	m	Число дробей или операций		
		Дейве [4, 17]	Вискомб [7, 19]	„ORION“
100	1,05—i	41	16	30
„	1,50—i	80	22	41
„	1,95—i	122	31	55
1000	1,05—0,01i	115	53	87
„	1,05—0,1i	121	32	67
„	1,05—i	555	20	41
„	1,50—0,1i	613	135	298
„	1,50—i	943	28	59
„	1,95—0,1i	1108	254	744
„	1,95—i	1370	42	86

* Дейве [4, 17]—обратная рекурсия, Вискомб [7, 19]—алгоритм Ленца [10]—точность 10^{-5} , «ORION»—алгоритм Ленца [10]—точность 10^{-20} .

В табл. 1 приводятся результаты сравнения расчетов $A_n(y)$ по программе Дейве [4], Ленца [10], которые приводятся в работе Вискомба [7], с результатами наших расчетов $A_n(y)$ по программе «ORION». Напомним, что Дейве [4] проводил расчеты $A_n(y)$ обратной рекурсией, а Вискомб [19] и программа «ORION» алгоритмом Ленца.

[10]. В таблице приводится число дробей или операций, необходимых для вычисления одного значения $A_n(y)$ для любого из p и m . Различие в числе дробей в «ORION» и у Вискомба [7, 19] связано с различием в точности вычисления $A_n(y)$: у Вискомба [7, 19]— 10^{-8} , а в «ORION»— 10^{-20} .

В табл. 2 сравниваются времена счета для одного из коэффициентов эффективности по программам Дейве [4, 17], Вискомба [7, 19] с расчетами по нашей программе «ORION». Как видно из табл. 2, скорость счета программой «ORION», для отдельных p и n , почти в 10 раз быстрее, чем при расчетах программой Вискомба [7, 19] и несравненно быстрее расчетов по программе Дейве [4, 17].

Таблица 2

Время расчета одного из значений фактора эффективности различными алгоритмами*

p	Время в секундах			
	Дейве [4, 17]	Вискомб [7, 19]	«ORION» $m=1,78-0,1i$	«ORION» $m=1,28-1,37i$
0,05	—	—	0,0057	0,0059
0,1	0,7	0,018	0,0057	0,005
1	1,1	0,036	0,0059	0,0062
10	3,7	0,098	0,0071	0,0071
100	22	0,54	0,045	0,0227
400	—	—	0,45	0,3616
1000	194	4,56	—	—

* Дейве [4, 17]—проводил расчеты на ЭВМ 360/50—360/91—10 млн операций/секунду; Вискомб [7, 19]—проводил расчеты на Сгау—1 млрд операций/секунду; «ORION»—расчеты проводились на ЕС-1045—0,8—1 млн операций/секунду.

В табл. 2 все времена приведены к скорости 10 млн операций/секунду.

Программа «ORION», написанная на языке PL/1, приводится в [20]. Здесь же представлено подробное описание различных алгоритмов, обозначений и способов рационального использования программы для определения интегральных характеристик оптики мутных сред: коэффициентов ослаблений, рассеяния, поглощения и радиолокационного отражения электромагнитных волн мутной полидисперсной средой из дискретных сферических частиц.

Заключение

В результате исследования алгоритмов различной природы удалось отобрать те из них, которые позволяют с малой погрешностью в широком диапазоне изменения действительного и мнимого аргументов специальных функций решить одну из сложных задач электродинамики—дифракцию электромагнитного излучения на сферических частицах. Уни-

версальная программа «ORION» позволяет выполнить расчеты коэффициентов Ми a_n и b_n практически для любых встречающихся в природе веществ капель и частиц и любых отношений размера частиц к длине волны падающего излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. ГИИТА, М., 1951, с. 288.
2. Шифрин К. С. Введение в оптику океана. Гидрометеонадат, Л., 1983, с. 278.
3. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. Изд. Мир, М., 1971, с. 165.
4. Dave J. V. Scattering of Electromagnetic Radiation by a Large Absorbing Sphere IBM J. Res. and Development. 1968, vol. 13, p. 302-313.
5. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. Изд. Мир, М., 1986, с. 660.
6. Шифрин К. С., Зельманович И. А. Таблицы по светорассеянию. Гидрометеонадат, Л., 1968, т. 3, с. 432.
7. Wiscombe W. J. Improve Mie Scattering Algorithm. Applied Optics. 1980, vol. 19, N 9, p. 1505-1509.
8. Allen E. E. Polynomial Approximations of some Modified Bessel Function. MTAC, 1956, N. 55, p. 162-169.
9. Goldstein M., Thaler R. M. Recurrence Techniques for Calculation of Bessel Function. MTAC, 1959, vol. 13, N. 66, p. 102-108.
10. Lentz W. J. Generating Bessel Function in Mie Scattering Calculation Using Continued Fraction Applied Optics 1976, vol. 15, N. 13, p. 668-671.
11. Abramowitz M., Oliver F. W., Antosiewicz H. A. In Handbook of Mathematical Function Abramowitz M. and Stegun I. A. Eds. Applied Mathematical Series 55 (U. S. Govt. Printing Office Washington, D. C. 1955) Chaps 3.9.10.
12. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. ИЛ, 1953, М., с. 372.
13. Infeld L. The Influence of the Width of the Cap Upon the Theory of Antennas. Quart. Appl. Math. 1947, vol. 5, N. 2, p. 113-132.
14. Smith P. The Conical Dipole Wide Angle. J. Applied Phys. 1948, vol. 19, p. 11-23.
15. Tai C. A. Study of the e. m. f. Method. J. Applied Phys. 1949, vol. 20, (july), p. 717-723; vol. 19, N. 12, p. 1155-1160; 1949, vol. 20, N. 11, p. 1076-1084.
16. Aden A. L. Electromagnetic Scattering from Sphere with Sizes Comparable to the Wavelength. J. Applied Physics. 1951, vol. 22, n. 5, p. 601-605.
17. Dave J. V. Scattering of Visible Light by Large Water Spheres. Applied Optics. 1969, vol. 8, N. 1, p. 155-164.
18. Kattawar G. W., Plass G. N. Electromagnetic Scattering from Absorbing Spheres. Applied Optics. 1967, vol. 6, N. 8, p. 1377-1382.
19. Wiscombe W. J. Mie Scattering Calculations: Advances in Technique and Fast, Vector-Speed Computer Codes. NCAR/TH 140 STR. (National center of atmospheric research), Boulder Colo. 1979.
20. Айвазян Г. М. Исследование алгоритмов в расчете коэффициентов Ми в задаче распространения ММ и СВММ волн в облаках. Препринт ЕФИ-1277 (63)-90. Ереван, 1990, с. 36.

ՄԻԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼ ԾՐԱԳԻՐ ԵՎ
ՀԱՇՎԱՐԿԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ

Հ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ԷՀՄ-ի վրա զննածև մասնիկների էլեկտրամագնիսական ճառագայթման դիֆրակցիայի, ամպերում միլիմետրանոց և ենթամիլիմետրանոց տիրույթի ալիքների թուլացման և ուղիղ-լուծացիոն անդրադարձման հաշվարկման նպատակով, հետադոտված են ալգորիթմներ և մշակված է հաշվարկի ունիվերսալ ծրագիր:

A PROGRAM FOR MIE COEFFICIENTS COMPUTATION

H. M. AIVAZYAN

Some algorithms for the computation of diffraction of electromagnetic radiation by spherical particles in problems of extinction and backscattering of millimeter and submillimeter waves in clouds were considered and a general computation program was developed.

Изв. АН Армении, Физика, т. 26, вып. 3, с. 130—132 (1991)

УДК 621.373.5

ЭФФЕКТ НАСЫЩЕНИЯ ПРИМЕСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В
ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ
С КВАНТОВО-РАЗМЕРНЫМИ СЛОЯМИ (КРС)

А. Г. АЛЕКСАНЫ, А. Г. АЛЕКСАНЫ, Г. С. НИКОГОСЯН

Институт радиофизики и электроники АН Армении

(Поступила в редакцию 25 октября 1990 г.)

Получены выражения для поляризации и коэффициента поглощения в легированных гетероструктурах с учетом эффекта насыщения. Исследуются некоторые предельные случаи.

Перспективность применения полупроводниковых гетероструктур с квантовыми размерными слоями (КРС) в современной твердотельной электронике [1] делает необходимым рассмотрение в них различных нелинейных процессов.

В последнее время, в связи с созданием на их основе гетеролазеров с улучшенными характеристиками [1], оптических бистабильных элементов [2], находящих применение в различных оптоэлектронных системах, вновь возрос интерес к одному из важных явлений нелинейной оптики полупроводников—насыщения поглощения излучения.

В работе [3] рассмотрено нелинейное поглощение излучения (эффект насыщения) в полупроводниковых гетероструктурах с КРС в случае прямых междузонных переходов. Несомненно, представляет интерес рассмотрение аналогичных эффектов, когда оптические переходы проис-