STATIC GRAVITATIONAL FIELDS IN PROJECTIVE THEORY OF GRAVITATION

R. M. AVAKYAN, B. V. KHACHATRYAN, E. V. CHUBARYAN

External vacuum solutions for neutral and charged point-like sources are found in the framework of projective theory of gravitation. The expressions connecting the integration constants with the internal structure of a central body are obtained.

Изв. АН Армении, Физика, т. 25, вып. 6, 321—330 (1990)

УДК 537.87

ФУНКЦИЯ ГРИНА КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН, А. С. ИСКАНДАРЯН

Институт прикладных проблем физики АН Армении

(Поступила в редакцию 20 апреля 1990 г.)

Предложен легко алгоритмизируемый метод решения уравнений Максвелла для среды, состоящей из произвольного числа соосных цилиндрических слоев с разными диэлектрическими проницаемостями.

1. В связи с проблемой исследования излучения заряженных частиц в неоднородной среде в [1—4] детально изучены решения уравнений Максвелла для среды с диэлектрической проницаемостью ε, изменяющейся вдоль выделенного направления. Менее изучены другие случаи, например, случай среды, состоящей из соосных цилиндрических слоев с разными ε. В [5, 6] исследовано излучение электрона, летящего параллельно оси цилиндра, в [7] рассмотрено излучение точечного заряда движущегося по оси канала в гиротропном диэлектрике. В [8] найдены громоздкие выражения для температурной функции Грина цилиндра и цилиндрического слоя, погруженных в бесконечную среду. После не тривиального аналитического продолжения (об этом см. [9]) они, в принципе, могут быть использованы для вычисления излучения электронов, движущихся произвольным образом. В [10] найдена функция Грина для вакуума между двумя идеально проводящими обкладками цилиндрического конденсатора. В данной работе рассмотрена среда, состоящая из произвольного числа соосных цилиндрических слоев. Найдена запаздывающая функция Грина, позволяющая, в частности, выписать решение уравнений Максвелла при произвольном распределении токов.

Рассмотрим среду, которая обладает цилиндрической симметрией. В цилиндрической системе координат ρ, φ, z, подобранной соответствующим образом, диэлектрическая проницаемость не зависит от φ и z: $\varepsilon=\varepsilon(\rho)$

(магнитную проницаемость считаем равной единице). Выберем калибровку Лоренца [2]:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0,$$

и представим пространственную часть $\mathbf{A} = A_\mu \mathbf{e}_\mu$ 4—потенциала $(\mathbf{A}, \chi)$ электромагнитного поля в виде

$$A_\mu = \int G_{\mu\sigma} j_\sigma (\rho', \varphi', z', t',) d\rho' d\varphi' dz' dt', \tag{1}$$

где $G_{\mu\nu} (\rho, \varphi, z, t; \rho', \varphi' z', t')$—запаздывающая функция Грина, а $\mathbf{j} = j_\mu \mathbf{e}_\mu$—плотность электрического тока. По повторяющимся индексам $\mu, \nu, \sigma, \ldots$, пробегающим значения ρ, φ, z, подразумевается суммирование; $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — базисные ортонормированные векторы цилиндрической системы координат. В силу симметрии среды

$$G_{\mu\sigma} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dk_z \, d\omega \, G_{\mu\sigma}(m, k_z, \omega, \rho, \rho') \, e^{i[m(\varphi - \varphi') + k_z (z - z') - \omega(t - t')]}$$

и поэтому уравнение для фурье-образа принимает вид

$$\left(F_{\mu\nu} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} D_{\mu\nu}\right) G_{\nu\sigma} = - \frac{1}{2\pi^2 c} \delta_{\mu\sigma} \delta (\rho - \rho'), \tag{2}$$

где

$$\|F_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} f & -g & 0 \\ g & f & 0 \\ 0 & 0 & f_z \end{pmatrix}, \quad \|D_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{im}{\rho} & i k_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, наконец, $g = 2 i m/\rho^2$,

$$f_z = f + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2} + \lambda^2, \quad \lambda = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \frac{c^2}{\omega^2} k_z^2}\,.$$

Здесь и в последующем аргументы $m, k_z, \omega, \rho, \rho'$ функции $G_{\mu\sigma}$ мы опускаем.

Нам понадобятся 3×3 матрицы S, удовлетворяющие уравнению

$$F_{\mu\nu} (\varepsilon_l) S_{\nu\sigma} = 0, \tag{3}$$

которое следует из (2) при $\varepsilon(\rho) = \varepsilon_l = \text{const}$ (бесконечная однородная среда). S можно представить в виде произведения трех матриц:

$$S = \Omega \cdot Y \cdot P, \tag{4}$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -i\delta_m & 0 \\ -i\delta_m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_- & 0 & 0 \\ 0 & y_+ & 0 \\ 0 & 0 & y_z \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а P — 3×3 матрица с произвольными элементами (δ_m равно 0 при $m=0$ и 1 в остальных случаях). От ρ зависит только Y. Его элементы определяются уравнениями

$$f(\varepsilon_l)\,y_\pm = \pm i g(\varepsilon_l)\,y_\pm, \qquad f_z(\varepsilon_l)\,y_z = 0.$$

Выпишем три типа решений этих уравнений: волна, распространяющаяся из бесконечности по направлению к центру

$$y_\pm = H^{(2)}_{1\mp m}(\lambda\rho) \equiv u_\pm, \qquad y_z = H^{(2)}_m(\lambda\rho) \equiv u_z;$$

волна, уходящая на бесконечность

$$y_\pm = H^{(1)}_{1\mp m}(\lambda\rho) \equiv v_\pm, \qquad y_z = H^{(1)}_m(\lambda\rho) \equiv v_z; \tag{6}$$

и волна, конечная в начале координат:

$$y_\pm = J_{1\mp m}(\lambda\rho) \equiv w_\pm, \qquad y_z = J_m(\lambda\rho) \equiv w_z. \tag{7}$$

Здесь $H^{(1)}_m$, $H^{(2)}_m$ — функции Ханкеля первого и второго родов, а J_m — функция Бесселя [11]. При $\lambda = 0$ соответствующие решения выберем в виде

$$u_\pm = w_\pm = \rho^{|1\mp m|}; \qquad v_\pm = \begin{cases} \rho^{-|1\mp m|}, \text{ при } m \neq \pm 1 \\ \ln\rho, \text{ при } m = \pm 1 \end{cases}; \tag{8}$$

$$v_z = \begin{cases} \rho^{-|m|}, \text{ при } m \neq 0 \\ \ln\rho, \text{ при } m = 0; \end{cases} \qquad u_z = w_z = \rho^{|m|}.$$

Для однородной среды уравнение (2) упрощается:

$$F(\varepsilon_l)\cdot G_l^{(0)} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\, I\,\delta(\rho - \rho'), \tag{9}$$

где I — единичная 3×3 матрица. В областях $\rho < \rho'$ и $\rho > \rho'$ оно переходит в (3) и поэтому можно воспользоваться формулой (4). В соответствии с (6)—(8) запаздывающая функция Грина

$$G_l^{(0)} = \Omega\cdot\begin{cases} W(\rho)\cdot P_1, \text{ при } \rho < \rho' \\ V(\rho)\cdot P_2, \text{ при } \rho > \rho'. \end{cases} \tag{10}$$

Матрицы P_1, P_2 определяются условиями непрерывности $G_l^{(0)}$ в точке $\rho = \rho'$ и

$$\left.\frac{\partial G_l^{(0)}}{\partial\rho}\right|_{\rho'-0}^{\rho'+0} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\, I.$$

Второе условие получается интегрированием (9) в окрестности $\rho = \rho'$. Подставив найденные значения P_1 и P_2 в (10), получим

$$G_l^{(0)} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot\Gamma^{(0)}(\varepsilon_l, \rho, \rho')\cdot\Omega^{-1}. \tag{11}$$

$\Gamma^{(0)}$ — диагональная матрица с $\rho\rho$ —, $\varphi\varphi$ — и zz — элементами равными соответственно γ_-, γ_+ и γ_z. Мы их будем обозначать символом γ_σ, где σ принимает значения $-$, $+$ и z:

$$\gamma_\sigma = \frac{\pi}{2i}\rho' J_a(\lambda\rho_<) H_a^{(1)}(\lambda\rho_>), \qquad \rho_{\gtrless} = \begin{cases}\max\\ \min\end{cases}(\rho,\rho'), \tag{12}$$

когда $\lambda \neq 0$ и

$$\gamma_z = \rho' \begin{cases} -\dfrac{1}{2|a|}\left(\dfrac{\rho_<}{\rho_>}\right)^{|a|}, & \text{при } a \neq 0,\\ \ln\rho_> \quad , & \text{при } a = 0,\end{cases} \tag{13}$$

когда $\lambda = 0$,

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1 \mp m, & \text{при } \sigma = \pm,\\ m \quad , & \text{при } \sigma = z.\end{cases} \tag{14}$$

$G_i^{(0)}$ в декартовой системе координат (см. [9]) выглядит проще, чем (11). Однако в ряде случаев (например, для синхротронного излучения) вычисление A_μ проще проводить в представлении (11).

2. Теперь рассмотрим случай цилиндра радиуса ρ_1 с диэлектрической проницаемостью ε_0, погруженного в среду с $\varepsilon = \varepsilon_1$:

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\theta(\rho - \rho_1),$$

$\theta(x)$ — ступенчатая функция равная 0 при $x < 0$ и 1 при $x > 0$. В этом случае уравнение (2) сводится к

$$\left[F - \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\delta(\rho - \rho_1)\,D\right]\cdot G^{(1)} = -\frac{1}{2\pi^2 c} I\delta(\rho - \rho'). \tag{15}$$

$G^{(1)}$ будем искать в виде

$$G^{(1)} = \begin{cases} G_0^{(0)} + S_0, & \text{при } \rho < \rho_1,\\ G_1^{(0)} + S_1, & \text{при } \rho > \rho_1,\end{cases} \tag{16}$$

где $G_i^{(0)}$ — запаздывающая функция Грина (11) однородной среды с $\varepsilon = \varepsilon_i$. Подставив (16) в (15) и учитывая (9), придем к уравнению (3) с $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ и ε_1 в областях $\rho < \rho_1$ и $\rho > \rho_1$ соответственно. Используя (4), (5), (6) — (8), можно сразу выписать его решения. Для запаздывающей функции Грина

$$S_0 = \frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot W(\varepsilon_0, \rho)\cdot X_0\cdot\Omega^{-1},$$

$$S_1 = \frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot V(\varepsilon_1, \rho)\cdot X_1\cdot\Omega^{-1}, \tag{17}$$

где X_0 и X_1 — не зависящие от ρ матрицы, множитель $1/(2\pi^2 c)$ и матрица Ω^{-1} введены ради удобства. В соответствии с этим из (11) и (16) находим

$$G^{(1)} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot\Gamma^{(1)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \rho, \rho', \rho_1)\cdot\Omega^{-1}, \tag{18}$$

где недиагональная 3×3 матрица $\Gamma^{(1)}$ имеет вид

$$\Gamma^{(1)}=\begin{cases}\Gamma^{(0)}(\varepsilon_0,\rho,\rho')-W(\varepsilon_0,\rho)\cdot X_0, & \text{при } \rho<\rho_1,\\ \Gamma^{(0)}(\varepsilon_1,\rho,\rho')-V(\varepsilon_1,\rho)\cdot X_1, & \text{при } \rho>\rho_1.\end{cases}\tag{19}$$

X_0 и X_1 определяются условиями сшивки

$$G^{(1)}(\rho_1-0)=G^{(1)}(\rho_1+0),\tag{20}$$

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial\rho}\Big|_{\rho_1-0}^{\rho_1+0}=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)D\cdot\Big[\frac{1}{\varepsilon_0}(G_0^{(0)}+S_0)+\frac{1}{\varepsilon_1}(G^{(1)}+S_1)\Big]_{\rho=\rho_1}.$$

Второе из них получается интегрированием (15) в окрестности $\rho=\rho_1$ при дополнительном предположении $\rho'\neq\rho_1$. Подставив (16), (17) в (20), получим систему двух линейных уравнений относительно X_0 и X_1. Решая ее, найдем

$$X_1=\left\|\frac{\gamma_1-\gamma_0}{v_1}\right\|+\left\|\frac{w_0}{v_1}\right\|\cdot X_0,\tag{21}$$

$$X_0=\Big[1-\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\left\|\frac{v_1}{\partial\, w_0,v_1}\right\|\cdot\Lambda\cdot Q\Big]^{-1}\cdot\Big[\left\|\frac{\partial\, v_1,(\gamma_1-\gamma_0)}{\partial\, w_0,v_1}\right\|+$$

$$+\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\left\|\frac{v_1}{\partial\, w_0,v_1}\right\|\cdot\Lambda\cdot R\Big],$$

где введены обозначения:

$$f_l\equiv f_\sigma(\varepsilon_l\,\rho),\qquad \partial\, a,b\equiv a\frac{\partial b}{\partial\rho}-\frac{\partial a}{\partial\rho}b,$$

$$\Lambda=\Omega^{-1}\cdot D\cdot\Omega=\frac{1}{1+\delta_m}\begin{pmatrix}1 & -i\delta_m & i\\ i\delta_m & \delta_m & -\delta_m\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1+m}{\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-m}{\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho} & 0\\ 0 & 0 & k_z\end{pmatrix},\tag{22}$$

$$Q(\rho)=\left\|\frac{1}{\varepsilon_0}w_\sigma(\varepsilon_0,\rho)+\frac{1}{\varepsilon_1}w_\sigma(\varepsilon_0,\rho_1)\frac{v_\sigma(\varepsilon_1,\rho)}{v_\sigma(\varepsilon_1,\rho_1)}\right\|,$$

$$R(\rho)=\left\|\frac{v_\sigma(\varepsilon_1,\rho)}{\varepsilon_1 v_0(\varepsilon_1,\rho_1)}[\gamma_\sigma(\varepsilon_1,\rho_1)-\gamma_\sigma(\varepsilon_0,\rho_1)]-\frac{1}{\varepsilon_0}\gamma_\sigma(\varepsilon_0,\rho)-\frac{1}{\varepsilon_1}\gamma_\sigma(\varepsilon_1,\rho)\right\|.$$

После подстановки (22) в (21) и дифференцирования следует положить $\rho=\rho_1$.

Перейдем к случаю $n>1$ соосных цилиндрических поверхностей с радиусами $\rho_1,\rho_2\ldots\rho_n$. Диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon^{(n)}=\varepsilon_0+\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1})\,\theta(\rho-\rho_k),$$

где $\varepsilon_0,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n$ произвольны. Уравнение (2) решим методом индукции, а именно: вычислим $G^{(n)}$, предполагая известной функцию Грина

$$G^{(n-1)} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot\Gamma^{(n-1)}(\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{n-1}, \rho, \rho', \rho_1 \ldots \rho_{n-1})\cdot\Omega^{-1}$$

для случая $n-1$ цилиндрических поверхностей с радиусами $\rho_1 \ldots \rho_{n-1}$. Представив $G^{(n)}$ в виде

$$G^{(n)} = \begin{cases} G^{(n-1)} + S^{(n-1)}, & \text{при } \rho < \rho_n, \\ G^{(0)}(\varepsilon_n, \rho, \rho') + S^{(0)}, & \text{при } \rho > \rho_n, \end{cases} \tag{23}$$

сведем задачу к нахождению $S^{(n-1)}$ и $S^{(0)}$. Теперь подставим (23) в (2)

$$\{F[\varepsilon^{(n-1)}] - \frac{1}{\varepsilon^{(n-1)}}\frac{\partial \varepsilon^{(n-1)}}{\partial \rho} D\}\cdot S^{(n-1)} = 0, \qquad \text{при } \rho < \rho_n,$$
$$F(\varepsilon_n)\cdot S^{(0)} = 0, \qquad \text{при } \rho > \rho_n, \tag{24}$$

где $\varepsilon^{(n-1)}$ — диэлектрическая проницаемость в случае $n-1$ границ. В свою очередь, приняв

$$S^{(n-1)} = \begin{cases} S_0, & \text{при } \rho < \rho_1, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ S_{n-1}, & \text{при } \rho_{n-1} < \rho < \rho_n, \end{cases} \tag{25}$$

получим

$$F(\varepsilon_i)\cdot S_i = 0, \qquad \text{при } \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \tag{26}$$

$i = 0, \ldots, n-1$; $\rho_0 \equiv 0$. По аналогии с (17) можно сразу выписать решения уравнений (24) и (26). Для запаздывающей функции Грина

$$S_0 = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot W(\varepsilon_0, \rho)\cdot X_0\cdot\Omega^{-1},$$

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot[U(\varepsilon_1\rho)\cdot X_1^- + V(\varepsilon_1, \rho)\cdot X_1^+]\cdot\Omega^{-1},$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \tag{27}$$

$$S_{n-1} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot[U(\varepsilon_{n-1}, \rho)\cdot X_{n-1}^- + V(\varepsilon_{n-1}, \rho)\cdot X_{n-1}^+]\cdot\Omega^{-1},$$

$$S^{(0)} = -\frac{1}{2\pi^2 c}\,\Omega\cdot V(\varepsilon_n, \rho)\cdot X_n\cdot\Omega^{-1}.$$

Матрицы $X_0, X_1^\pm \ldots X_{n-1}^\pm, X_n$ определяются условиями сшивки при $\rho = \rho_1 \ldots$ $\ldots \rho_n$. Они аналогичны (20) и приведены в таблице. Через Y_l; $Y = U$, V, W обозначено $Y(\varepsilon_l, \rho)$,

$$Q_l^\uparrow = \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_{l-1}}{\varepsilon_l}\right)\Lambda(\rho), \qquad Q_l^\downarrow = \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_{l-1}}\right)\Lambda(\rho).$$

Из двух уравнений первой строки таблицы находим:

Таблица

ρ	Условие непрерывности $G^{(n)}$	Сшивка производных $G^{(n)}$
ρ_1	$W_0 X_0 = U_1 X_1^- + V_1 X_1^+$	$Q_1^{\downarrow} (W_0 X_0) = Q_1^{\uparrow} (U_1 X_1^- + V_1 X_1^+)$
ρ_2	$U_1 X_1^- + V_1 X_1^+ = U_2 X_2^- + V_2 X_2^+$	$Q_2^{\downarrow} (U_1 X_1^- + V_1 X_1^+) = Q_2^{\uparrow} (U_2 X_2^- + V_2 X_2^+)$
.	. . .	. . . .
ρ_{n-1}	$U_{n-2} X_{n-2}^- + V_{n-2} X_{n-2}^+ = U_{n-1} X_{n-1}^- + V_{n-1} X_{n-1}^+$	$Q_{n-1}^{\downarrow} (U_{n-2} X_{n-2}^- + V_{n-2} X_{n-2}^+) = Q_{n-1}^{\uparrow} (U_{n-1} X_{n-1}^- + V_{n-1} X_{n-1}^+)$
ρ_n	$\Gamma^{(n-1)} + U_{n-1} X_{n-1}^- + V_{n-1} X_{n-1}^+ = \Gamma_n^{(0)} + V_n X_n$	$Q_n^{\downarrow} [\Gamma^{(n-1)} + U_{n-1} X_{n-1}^- + V_{n-1} X_{n-1}^+] = Q_n^{\uparrow} [\Gamma_n^{(0)} + V_n X_n]$

$$X_0 = W_0^{-1}\cdot(U_1 + V_1\cdot L_1)\cdot X_1^-, \qquad X_1^+ = L_1\cdot X_1^-,$$

$$L_1 \equiv -[Q_1^{\uparrow}(V_1) - Q_1^{\downarrow}(W_0)\cdot W_0^{-1}\cdot V_1]^{-1}\cdot[Q_1^{\uparrow}(U_1) - Q_1^{\downarrow}(W_0)\cdot W_0^{-1}\cdot U_1]. \tag{28}$$

В U_1, V_1 и L_1 (после дифференцирования) следует положить $\rho=\rho_1$. Аналогичным образом из второй строки таблицы имеем:

$$X_1^- = B_1^{-1}\cdot(U_2 + V_2\cdot L_2)\cdot X_2^-, \qquad X_2^+ = L_2\cdot X_2^-,$$

$$L_2 \equiv -[Q_2^{\uparrow}(V_2) - Q_2^{\downarrow}(B_1)\cdot B_1^{-1}\cdot V_2]^{-1}\cdot[Q_2^{\uparrow}(U_2) - Q_2^{\downarrow}(B_1)\cdot B_1^{-1}\cdot U_2], \tag{29}$$

$$B_1(\rho) \equiv U(\varepsilon_1,\rho) + V(\varepsilon_1,\rho)\cdot L_1(\rho_1).$$

В U_2, V_2 и L_2, B_1 (после дифференцирования) $\rho=\rho_2$. И так далее. При $\rho=\rho_{n-1}$ получаем:

$$X_{n-2}^- = B_{n-2}^{-1} + (U_{n-1}+V_{n-1}.L_{n-1})\cdot X_{n-1}^-, \qquad X_{n-1}^+ = L_{n-1}\cdot X_{n-1}^-,$$

$$L_{n-1} \equiv -[Q_{n-1}^{\uparrow}(V_{n-1}) - Q_{n-1}^{\downarrow}(B_{n-2})\cdot B_{n-2}^{-1}\cdot V_{n-1}]^{-1}\cdot$$

$$\cdot[Q_{n-1}^{\uparrow}(U_{n-1}) - Q_{n-1}^{\downarrow}(B_{n-2})\cdot B_{n-2}^{-1}\, U_{n-1}],$$

$$B_{n-2}(\rho) \equiv U(\varepsilon_{n-2},\rho) + V(\varepsilon_{n-2},\rho)\cdot L_{n-2}(\rho_{n-2}). \tag{30}$$

В U_{n-1}, V_{n-1} и L_{n-1}, B_{n-2} следует положить $\rho=\rho_{n-1}$. Система зацепляющихся равенств (28) — (30) определяет $X_0, X_1^{\pm}\ldots X_{n-2}^{\pm}, X_{n-1}^+$ в зависимости от X_{n-1}^- (см. рис. 1). Так, например,

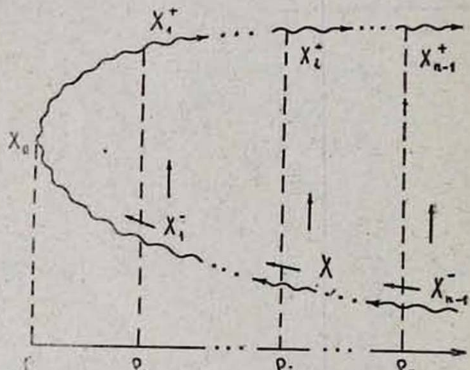

Рис. 1. Диаграмма, соответствующая $S^{(n-1)}$ (см. (25), (27)), для случая n соосных цилиндрических поверхностей с радиусами $\rho=\rho_1\cdots\rho_n$. В областях $\rho\in[0,\rho_1),(\rho_1,\rho_2)\cdots(\rho_{n-1},\rho_n)$, $\rho(_n,\infty)$ диэлектрическая проницаемость равна $\varepsilon_0, \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$. Стрелки указывают на приведенные в (28) — (30) формулы, выражающие амплитуды X_{i-1}^-, X_i^+, через X_i^- ($i=1,2\cdots n-1$, $X_0^-\equiv X_0$).

$$X_0 = W_0^{-1}.B_1(\rho_1)\cdot B_1^{-1}(\rho_2)\cdot B_2(\rho_2)\cdot B_2^{-1}(\rho_3)\ldots B_{n-2}^{-1}(\rho_{n-1})\cdot B_{n-1}(\rho_{n-1})\cdot X_{n-1}^-.$$

Остается вычислить $X_{n=1}^-$ и X_n. Из уравнений последней строки таблицы имеем

$$X_{n-1}^- = B_{n-1}^{-1}\cdot[\Gamma_n^{(0)} - \Gamma^{(n-1)} + V_n\cdot X_n],$$

$$X_n = -[Q_n^{\uparrow}(V_n) - Q_n^{\downarrow}(B_{n-1})\cdot B_{n-1}^{-1}\cdot V_n]^{-1}\cdot \tag{31}$$

$$\cdot[Q_n^{\uparrow}(\Gamma_n^{(0)}) - Q_n^{\downarrow}(\Gamma^{(n-1)}) - Q_n^{\downarrow}(B_{n-1})\cdot B_{n-1}^{-1}\cdot(\Gamma^{(0)} - \Gamma^{(n-1)})].$$

$$B^{(\rho)}_{n-1} \equiv U(\varepsilon_{n-1}, \rho) + V(\varepsilon_{n-1}, \rho) \cdot L_{n-1}(\rho_{n-1}).$$

После дифференцирования следует подставить $\rho = \rho_n$.

Мы завершили построение функции Грина, поскольку (23), (25), (27), (28)—(30), (31) выражают $G^{(n)}$ через $G^{(n-1)}$. Для однородной среды функция Грина $G_l^{(0)}$ приведена в (11)—(14), а для цилиндра

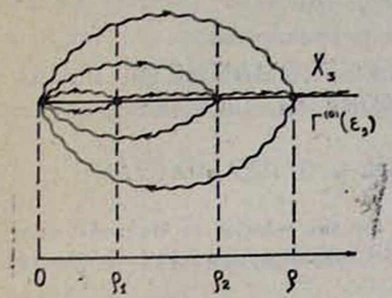

Рис. 2. Функция Грина $G^{(3)}$ для случая трех соосных цилиндрических поверхностей с радиусами $\rho=\rho_1$, ρ_2 и ρ_3. Замкнутая волнистая линия, достигающая границы $\rho=\rho_3$, соответствует амплитудам X_0, $X_1^{\pm}$, $X_2^{\pm}$ (см. (27)). Прямая линия соответствует функциям Грина однородной среды $\Gamma^{(0)}(\varepsilon_0)$, $\Gamma^{(0)}(\varepsilon_1)$, $\Gamma^{(0)}(\varepsilon_2)$ и $\Gamma^{(0)}(\varepsilon_3)$ (см. (11)).

$G^{(1)}$—в (18), (19), (21), (22). На рис. 2 представлена диаграмма, соответствующая $G^{(3)}$. Зная $G^{(n)}$ по формуле (1) можно вычислить поле произвольным образом движущихся зарядов, а после перехода к соответствующей полевой функции Грина [9]—все характеристики электромагнитного поля в среде. Результаты расчетов будут представлены в следующей работе.

Авторы признательны проф. Мкртчяну А. Р. за постановку задачи и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Микаелян М. Л.* Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1969.
2. *Гарибян Г. М., Ян Ши.* Рентгеновское переходное излучение Изд. АН АрмССР, Ереван, 1983.
3. *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. Изд. Наука, М., 1984.
4. *Базылев В. А., Жеваго Н. К.* Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. Изд. Наука, М., 1987.
5. *Болотовский Б. М.* УФН, 75, 295 (1961).
6. *Агинян М. А., Бабаханян Э. А., Ян Ши.* Изв. АН АрмССР, Физика, 15, 247 (1980).
7. *Айвазян В. Р., Мергелян О. С.* Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 102 (1969).
8. *Коротких А. М., Набутовский В. М.* ТМФ, 41, 388 (1979).
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Часть 2. Изд. Наука, М., 1978.
10. *Candelas P.* Ann. Phys. N. Y., 143, 241 (1982).
11. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. Изд. Наука, М., 1979.

ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԵՐԻ ԳՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԴԱՍԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ՀԱՄԱՐ

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ, Ա. Ս. ԻՍԿԱՆԴԱՐՅԱՆ

Առաջարկված է համառանցք գլանային շերտերից բաղկացած միջավայրում Մաքսվելի հավասարումների լուծման պարզ ալգորիթմ։

GREEN FUNCTION OF CLASSICAL ELECTROMAGNETIC FIELD IN CASE OF COAXIAL CYLINDRICAL LAYERS

L. SH. GRIGORYAN, A. A. SAHARYAN, A. S. ISKANDARYAN

An easily algorithmizing method is proposed for the solution of Maxwell equations for media consisting of an arbitrary number of coaxial cylindrical layers having different permittivities.

Изв. АН Армении, Физика, т. 25, вып. 6, 330—337 (1990)

УДК 530.145

СУПЕРОБОБЩЕНИЯ $CP(N)$, КАК ПРИВЕДЕННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СУПЕРГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А. П. НЕРСИСЯН, О. М. ХУДАВЕРДЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 14 января 1990 г.)

На основе обобщенной на случай суперпространств процедуры редукции гамильтоновых систем по интегралам движения построены кэлеровы супермногообразия, являющиеся суперобобщениями $CP(N)$. Одно из них, имеющее четную и нечетную относительно грассмановой градуировки кэлеровы структуры, ассоциировано кокасательному расслоению $CP(N)$.

Кэлеровы многообразия и соответствующие им кэлеровы σ-модели занимают важное место в теории поля, обладая рядом свойств, обусловливающих топологическую нетривиальность кэлеровых σ-моделей. Наибольший интерес к ним обусловлен возможностью $N=2$ суперобобщений (см., например, обзор [1]). Комплексное проективное пространство $CP(N)$ является простейшим нетривиальным кэлеровым многообразием. Суперобобщения $CP(N)$, построению которых посвящена работа, позволяют построить σ-модели с глобальной суперсимметрией, а получение их редукцией по действию группы $U(1)$ и ее суперобобщениям — выявить существенные топологические свойства.

Назовем комплексное супермногообразие с локальными координатами w^A кэлеровым, если на нем существует невырожденная метрика

$$d S^2 = d w^A g_{A\bar{B}} d\bar{w}^B$$