12. *Keinigs R., Jones M. E.* Phys. Fluids, 30 (1), 252 (1987).
13. *Chen P.* Part. Acc. 20, 171 (1986).
14. *Rosenzweig J. B.* et all. Fermilab—Pub—89/213. Phys. Fluids B, Special Issue, 1989.
15. *Whittim D. H.* et all. Preprint LBL—25759, Rev. 2, Lawrence Berkley Laboratory, June 1989. (Snbmitted to Particle Accelerators).
16. *Bennet W. H.* Phys. Rev., 45, 890 (1934).

ՓՆՋԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՉԱՓՍԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄԸ ՊԼԱԶՄԱՅՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԿԻԼՎԱՏԵՐԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐ ԳՐԳՌԵԼԻՍ

Ա. Ց. ԱՄԱՏՈՒՆԻ, Է. Վ. ՍԵՂԲՈՍՅԱՆ, Ս. Ս. ԷԼԲԱԿՅԱՆ

Բացահայտված է փնջի լայնական չափսերի ազդեցությունը պլազմայում ոչ գծային կիլվատերային ալիքների գրգռման գործընթացի վրա։ Ստացված են արտահայտություններ փնջում առաջացող դաշտերի և լայնական ֆոկուսացնող ուժի համար, որը ազդում է փնջի էլեկտրոնների շարժման վրա։

ALLOWANCE FOR FINITE CROSS SIZE OF AN ELECTRON BUNCN AT THE GENERATION OF NONLINEAR WAKE WAVES IN PLASMA

A. TS. AMATUNI, E. V. SEKHPOSSYAN, S. S. ELBAKYAN

The influence of finite cross size of a bunch on the process of generation of nonlinear wake waves in plasma is established. Expressions for electric and magnetic fields arising in the bunch as well as for the transverse focusing field acting on the bunched electrons are obtained.

Изв. АН Армении, Физика, т. 25, вып. 6, 313—321 (1990)

УДК 548

СТАТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ПРОЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Р. М. АВАКЯН, Б. В. ХАЧАТРЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 2 апреля 1990 г.)

В рамках проективной теории гравитации найдены аналитические внешние решения в случаях нейтрального и заряженного сферически-симметрического распределения масс. Найдены выражения, связывающие постоянные интегрирования с внутренней структурой центрального тела.

В проективной теории тяготения [1] гравитационное поле определяется, наряду с компонентами g_{ik} метрического тензора, скаляром σ. В общем случае уравнения проективной теории имеют вид

$$R_l^k - \frac{1}{2} R \delta_l^k = \varkappa_0 [\Sigma_l^k + T_l^k + E_l^k], \tag{1}$$

$$\sigma_{;k}^k = \varkappa_0 \left(\frac{2}{3} \vartheta + \frac{1}{8\pi} B_{mn} H^{mn} \right), \tag{2}$$

где $\varkappa_0 = 8\pi k / c^4$, k — ньютоновская гравитационная постоянная, c — скорость света, T_l^k — тензор энергии—импульса материи, E_l^k — тензор энергии—импульса электромагнитного поля, Σ_l^k — тензор, связанный со скалярным полем следующим соотношением

$$\Sigma_l^k = \frac{3}{2\varkappa_0} (\sigma_l \sigma^k - \frac{1}{2} \delta_l^k \sigma_e \sigma^e).$$

Здесь $\sigma_l \equiv \partial \sigma / \partial x^l$, $\sigma^k = g^{kl} \sigma_l$.

Тензор E_l^k связан с тензорами электромагнитного поля H_l^k и B_l^k соотношением

$$E_l^k = \frac{1}{4\pi} [B_l^m H_m^k + \frac{1}{4\pi} \delta_l^k B_{mn} H^{mn}].$$

Тензоры H^{mn} и B_{mn} удовлетворяют уравнениям

$$H_{;k}^{mn} = \frac{4\pi}{c} j^m, \tag{3}$$

$$B_{mn;k} + B_{km,n} + B_{nk;m} = 0,$$

где j^m — четырехмерный вектор тока, а связь между тензорами B_{mn} и H^{mn} дается соотношением

$$B_{mn} = e^{-3\sigma} H^{mn}. \tag{4}$$

Скалярная функция ϑ, входящая в (2), согласно идее скаляризма зависит только от давления вещества [1].

Из уравнений поля следуют уравнения гидродинамики, имеющие вид

$$T_{;k}^{ik} = -\frac{1}{c} B_m^l j^m + \sigma^l \vartheta.$$

1. Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое нейтральным, статическим, сферически-симметрическим распределением материи. Запишем метрику в изотропных координатах ($x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, система единиц $c = k = 1$):

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)]. \tag{5}$$

Как и функции ν и λ, давление P, плотность энергии μ и скаляр σ зависят только от радиальной координаты r. Тензор энергии—импульса материи равен

$$T_l^k = (P + \mu) u_l u^k - P \delta_l^k. \tag{6}$$

Здесь $u^l = dx^l / ds$ — четырехскорость, отличной от нуля компонентой является u^0, поэтому компоненты T_l^k, отличные от нуля, равны

$$T_0^0=\mu,\ T_1^1=T_2^2=T_3^3=-P. \tag{7}$$

Поскольку от нуля отлична только компонента $\sigma_1=\partial\sigma/\partial r=\sigma'$, $\sigma^1=g^{11}\sigma_1=g^{11}\sigma'$, для тензора $\sum_i^k$ имеем

$$\Sigma_0^0=-\Sigma_1^1=\Sigma_2^2=\Sigma_3^3=\frac{3}{4\varkappa_0}g^{11}(\sigma^1)^2=-\frac{3}{4\varkappa_0}e^{-\lambda}(\sigma')^2. \tag{8}$$

С учетом (5)—(8) можем написать в явном виде уравнения поля (1)—(2):

$$e^{-\lambda}\left(\lambda''+\frac{\lambda'^2}{4}+\frac{2\lambda'}{r}\right)=\varkappa_0\left[-\mu-\frac{3}{4\varkappa_0}e^{-\lambda}(\sigma')^2\right], \tag{9}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'^2}{4}+\frac{\lambda'+\nu'}{r}+\frac{\lambda'\nu'}{2}\right)=\varkappa_0\left[P+\frac{3}{4\varkappa_0}e^{-\lambda}(\sigma')^2\right], \tag{10}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda''+\nu''}{2}+\frac{\lambda'^2}{4}+\frac{\nu'+\lambda'}{2r}\right)=\varkappa_0\left[P-\frac{3}{4\varkappa_0}e^{-\lambda}(\sigma')^2\right], \tag{11}$$

$$\left(r^2e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\sigma'\right)'=\frac{2\varkappa_0}{3}\vartheta(P)\,r^2e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}. \tag{12}$$

Систему уравнений (9)—(12) необходимо дополнить уравнением состояния $\mu=\mu(P)$. Кроме того, вместо одного из этих уравнений можно использовать единственное нетривиальное уравнение гидродинамики, имеющее в данном случае вид

$$P'=-\frac{\nu'}{2}(P+\mu)-\sigma'\vartheta(P).$$

В пустоте ($\mu=0$, $P=0$, $\vartheta=0$) уравнения удается аналитически решить. Умножив (11) на 2, прибавив (10) и отняв (9), получим

$$\nu''+\frac{2\nu'}{r}+\nu'\,\frac{\nu'+\lambda'}{2}=0, \tag{13}$$

откуда

$$\nu'=\frac{2M}{r^2}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{14}$$

где M — постоянная интегрирования, имеющая смысл массы центрального тела, что можно увидеть из поведения $g_{00}=e^{\nu}$ на больших расстояниях

$$e^{\nu}\approx 1+\nu=1+\frac{2\varphi}{c^2}, \tag{15}$$

где $\varphi=kM/r$ — ньютоновский гравитационный потенциал.

Сложив (9) и (10), получим

$$\lambda''+\frac{3\lambda'}{r}+\frac{\nu'}{r}+\lambda'\,\frac{\nu'+\lambda'}{2}=0,$$

откуда

$$\lambda' = -\frac{2\,M_1(r)}{r^2}\, e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{16}$$

где

$$M_1(r) = M - \frac{A}{r},$$

A — постоянная интегрирования.

Из (15) и (16) легко получить

$$e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} = 1 - \frac{A}{2\,r^2}. \tag{17}$$

Первый интеграл уравнения (12) в пустоте дает:

$$\sigma' = \frac{2\,M_2}{r^2}\, e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} = \frac{M_2}{M}\,\nu', \tag{18}$$

где M_2 — новая постоянная интегрирования. На больших расстояниях $\nu \to 0$, $\sigma \to 0$, поэтому имеем:

$$\sigma = \frac{M_2}{M}\,\nu = \gamma\,\nu \quad \left(\gamma = \frac{M_2}{M}\right). \tag{19}$$

Постоянные M, A и γ связаны соотношением, которое можно найти подставив (15), (16) и (18) в одно из уравнений системы (9)—(11). (Напомним, что мы не использовали все три уравнения, а лишь две их комбинации). В результате получим следующую связь

$$2\,A = M^2\,(1 + 3\,\gamma^2) = \alpha^2\,M^2.$$

С учетом (17)—(19), после интегрирования (14) и (16) получим

$$e^{\nu} = \left(\frac{1 - \frac{\alpha\, r_g}{4\,r}}{1 + \frac{\alpha\, r_g}{4\,r}}\right)^{\frac{2}{\alpha}},$$

$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{\alpha^2\, r_g^2}{16\,r^2}\right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\alpha\, r_g}{4\,r}}{1 - \frac{\alpha\, r_g}{4\,r}}\right)^{\frac{2}{\alpha}},$$

$$e^{\sigma} = \left(\frac{1 - \frac{\alpha\, r_g}{4\,r}}{1 + \frac{\alpha\, r_g}{4\,r}}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha}},$$

где $r_g = 2\,k\,M/c^2$ — гравитационный радиус тела. На больших расстояниях от центрального тела имеем разложения:

$$e^{\nu} \approx 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{2r^2},$$

$$e^{\lambda} \approx 1 + \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{r^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right).$$

Теории Эйнштейна соответствует значение параметра $\alpha = 1$.

Постоянные M и γ ($\alpha = 1 + 3\gamma^2$) определяются путем сшивки внешнего и внутреннего решений. Для этого рассмотрим уравнения поля внутри распределения масс. Возьмем ту комбинацию уравнений, из которых получается (13)

$$\nu'' + \frac{2\nu'}{r} + \nu' \, \frac{\nu' + \lambda'}{2} = 8\pi e^{\lambda} (\mu + 3P).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\nu' = \frac{2m(r)}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{20}$$

$$m' = 4\pi r^2 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} (\mu + 3P).$$

Сравнивая на поверхности тела $r = r_s$ (14) и (20) замечаем, что $M = m(r_s)$, т. е. функция $m(r)$ играет роль «накопленной массы» — массы внутри сферы радиуса r. Таким образом, постоянная M равна

$$M = 4\pi \int_0^{r_s} (\mu + 3P) e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} r^2 dr$$

и совпадает с выражением для толменовской массы.

Внутри распределения масс уравнение (12) также можно записать как два уравнения первого порядка:

$$\sigma' = \frac{2m_2(r)}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{21}$$

$$m_2' = \frac{8\pi}{3} \vartheta(P) e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} r^2.$$

Из (20) и (21) имеем

$$\frac{\sigma'(r)}{\nu'(r)} = \frac{m_2(r)}{m(r)}. \tag{22}$$

Сравнивая на поверхнисти $r = r_s$ (18) и (22), находим постоянную

$$\gamma = \frac{m_2(r_s)}{m(r_s)} = \frac{M_2}{M} = \frac{\frac{8\pi}{3}\int\limits_0^{r_s} \vartheta(P)\, r^2 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}\, dr}{4\pi\int\limits_0^{r_s} (\mu+3P)\, r^2 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}\, dr}.$$

Отметим, что положив $\vartheta(\rho)=0$, получим $\gamma=0$ и соответствующее решение теории Эйнштейна.

2. Рассмотрим теперь внешнее решение в случае, когда конфигурация имеет заряд q, распределенный внутри нее сферически-симметрично. Соответствующее внешнее решение в рамках обобщенной теории тяготения [2] было найдено в [3].

От нуля отличны компоненты H^{01} и B_{01} тензора электромагнитного поля. Из (3) получим

$$H^{01} = \frac{C}{r^2} e^{-\frac{\nu+3\lambda}{2}}.$$

Эта компонента имеет смысл радиальной компоненты E_r напряженности электрического поля, откуда для постоянной интегрирования получаем значение $C=q$.

$$H^{01} = \frac{q}{r^2} e^{-\frac{\nu+3\lambda}{2}}. \tag{23}$$

Для B_{01} из (4) получим

$$B_{01} = \frac{q}{r^2} e^{-\frac{\nu+3\lambda}{2}-3\sigma}. \tag{24}$$

Отличные от нуля компоненты E_i^k равны:

$$E_0^0 = E_1^1 = -E_2^2 = -E_3^3 = \frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{r^4} e^{-2\lambda-3\sigma}. \tag{25}$$

С учетом (23)—(25) система уравнений (1)—(2) вне распределения масс имеет вид

$$-e^{-\lambda}\left(\lambda'' + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{2\lambda'}{r}\right) = \varkappa_0\left[\frac{3}{4\varkappa_0} e^{-\lambda}(\sigma')^2 + \frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{r^4} e^{-2\lambda-3\sigma}\right], \tag{26}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\nu'+\lambda'}{r} + \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) = \varkappa_0\left[-\frac{3}{4\varkappa_0} e^{-\lambda}(\sigma')^2 + \frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{r^4} e^{-2\lambda-3\sigma}\right], \tag{27}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} + \frac{\nu'+\lambda'}{2r} + \frac{\nu'^2}{4}\right) = \varkappa_0\left[\frac{3}{4\varkappa_0} e^{-\lambda}(\sigma')^2 + \frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{r^4} e^{-2\lambda-3\sigma}\right], \tag{28}$$

$$\left(r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\sigma'\right)' = -\frac{2q^2}{r^2} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}-3\sigma}. \tag{29}$$

Сложив (27) и (28) получим

$$\frac{(\nu+\lambda)''}{2}+\frac{3(\nu+\lambda)'}{2r}+\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}\right)^2=0,$$

откуда

$$\ln\frac{\nu'+\lambda'}{2}r^3 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}=\text{const}.$$

С учетом того, что при $r\to\infty$, $\nu\to 0$, $\lambda\to 0$, получаем

$$e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}=1-\frac{B^2}{r^2}, \tag{30}$$

где B — постоянная интегрирования.

Взяв ту же комбинацию уравнений, из которой следует (13), с учетом (30), получим

$$[(r^2-B^2)\nu']'=\frac{2q^2}{r^2-B^2}e^{\nu-3\sigma}. \tag{31}$$

Подставив (30) в (29), находим

$$[(r^2-B^2)\sigma']'=-\frac{2q^2}{r^2-B^2}e^{\nu-3\sigma}. \tag{32}$$

Сравнение (31) и (32) дает

$$\sigma'+\nu'=\frac{2C_1 B}{r^2-B^2},\ (C_1=\text{const})$$

откуда

$$e^{\nu+\sigma}=\left(\frac{r-B}{r+B}\right)^{C_1}. \tag{33}$$

Подставим в (31) значение σ из (33)

$$[(r^2-B^2)\nu']'=\frac{2q^2}{r^2-B^2}\left(\frac{r+B}{r-B}\right)^{3C_1}e^{4\nu}.$$

Введя новую переменную

$$x=\ln\frac{r+B}{r-B} \tag{34}$$

и новую функцию

$$z=4\nu+3C_1x, \tag{35}$$

получим уравнение

$$z''=\frac{2q^2}{B^2}e^z,$$

решение которого есть

$$x=\frac{2}{\sqrt{C_3}}\ln\left(\sqrt{C_3}\,e^{-\frac{z}{2}}+\sqrt{\frac{4q^2}{\mathrm{B}^2}+C_3\,e^{-z}}\right)+C_2,$$

где C_2 и C_3 — постоянные интегрирования. Из условия $r\to\infty$, $\nu\to 0$ имеем $x\to 0$, $z\to 0$, откуда

$$C_2=-\frac{2}{\sqrt{C_3}}\ln\left(\sqrt{C_3}+\sqrt{\frac{4q^2}{\mathrm{B}^2}+C_3}\right).$$

С учетом (34) и (35) находим

$$e^{2\nu}=\frac{2\sqrt{C_3}\left(\sqrt{C_3}+\sqrt{\frac{4q^2}{\mathrm{B}^2}+C_3}\right)\left(\frac{r-\mathrm{B}}{r+\mathrm{B}}\right)^{\frac{\sqrt{C_3}}{2}}}{\left(\sqrt{C_3}+\sqrt{\frac{4q^2}{\mathrm{B}^2}+C_3}\right)^2\left(\frac{r-\mathrm{B}}{r+\mathrm{B}}\right)^{\sqrt{C_3}}-\frac{4q^2}{\mathrm{B}^2}}\left(\frac{r-\mathrm{B}}{r+\mathrm{B}}\right)^{\frac{3C_1}{2}}. \qquad (36)$$

Функции σ и λ определяются из (30) и (33), с учетом (36). Связь между постоянными интегрирования, входящими в решение, можно найти, подставив производные ν', λ' и σ' в одно из уравнений (26)—(28). В результате получаем

$$C_3+3\,C_1^2=16.$$

Разлагая (60) по степеням $1/r$ и учитывая (15), получим

$$4\mathrm{M}=\mathrm{B}\left(3\,C_1-\sqrt{\frac{4q^2}{\mathrm{B}^2}+16-3\,C_1^2}\right),$$

что дает возможность выразить B (или C_1) через M и q. Таким образом, во внешнее решение входят постоянные M, q и B (или C_1). Они определяются путем сшивки внешнего решения с внутренним, как это было сделано в первой части статьи при рассмотрении нейтрального вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmutzer E.* Ann. der Physic, 45, 578 (1988).
2. *Саакян Г. С.* Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Изд. Наука, М., 1972.
3. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* Астрофизика, 21, 587 (1984).

ՍԱՍՏԻԿ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ՁԳՈՂՈՒԹՅԱՆ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ռ. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆ, Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Է. Վ. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

Գրավիտացիայի պրոյեկտիվ տեսության շրջանակներում գտնված են անալիտիկ արտաքին լուծումներ չեզոք և լիցքավորված նյութի սֆերիկ սիմետրիկ բաշխման դեպքում։ Գտնված են կենտրոնական ներքին կառուցվածքի հետ ինտեգրման հաստատունները կապող արտահայտությունները։

STATIC GRAVITATIONAL FIELDS IN PROJECTIVE THEORY OF GRAVITATION

R. M. AVAKYAN, B. V. KHACHATRYAN, E. V. CHUBARYAN

External vacuum solutions for neutral and charged point-like sources are found in the framework of projective theory of gravitation. The expressions connecting the integration constants with the internal structure of a central body are obtained.

Изв. АН Армении, Физика, т. 25, вып. 6, 321—330 (1990)

УДК 537.87

ФУНКЦИЯ ГРИНА КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН, А. С. ИСКАНДАРЯН

Институт прикладных проблем физики АН Армении

(Поступила в редакцию 20 апреля 1990 г.)

Предложен легко алгоритмизируемый метод решения уравнений Максвелла для среды, состоящей из произвольного числа соосных цилиндрических слоев с разными диэлектрическими проницаемостями.

1. В связи с проблемой исследования излучения заряженных частиц в неоднородной среде в [1—4] детально изучены решения уравнений Максвелла для среды с диэлектрической проницаемостью ε, изменяющейся вдоль выделенного направления. Менее изучены другие случаи, например, случай среды, состоящей из соосных цилиндрических слоев с разными ε .В [5, 6] исследовано излучение электрона, летящего параллельно оси цилиндра, в [7] рассмотрено излучение точечного заряда движущегося по оси канала в гиротропном диэлектрике. В [8] найдены громоздкие выражения для температурной функции Грина цилиндра и цилиндрического слоя, погруженных в бесконечную среду. После не тривиального аналитического продолжения (об этом см. [9]) они, в принципе, могут быть использованы для вычисления излучения электронов, движущихся произвольным образом. В [10] найдена функция Грина для вакуума между двумя идеально проводящими обкладками цилиндрического конденсатора. В данной работе рассмотрена среда, состоящая из произвольного числа соосных цилиндрических слоев. Найдена запаздывающая функция Грина, позволяющая, в частности, выписать решение уравнений Максвелла при произвольном распределении токов.

Рассмотрим среду, которая обладает цилиндрической симметрией. В цилиндрической системе координат ρ, φ, z, подобранной соответствующим образом, диэлектрическая проницаемость не зависит от φ и z: $\varepsilon=\varepsilon(\rho)$