

УЧЕТ КОНЕЧНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

А. Ц. АМАТУНИ, Э. В. СЕХПОСЯН, С. С. ЭЛБАКЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 2 марта 1990 г.)

Выяснено влияние конечности поперечных размеров сгустка на генерацию нелинейных кильватерных волн в плазме. Получены выражения для полей внутри сгустка и возникающей в этом случае фокусирующей поперечной силы.

Нелинейные явления, возникающие при генерации кильватерных волн бесконечным, в поперечных направлениях, сгустком электронов в плазме рассматривались в ряде работ [1—8]. Учет поперечных размеров сгустка выявляет определенные условия, при которых полученные в [1—8] результаты могут сохраниться.

1. Рассмотрим взаимодействие с плазмой релятивистского цилиндрического сгустка электронов длины d , поперечных размеров a , движущегося со скоростью v_0 вдоль оси z через бесконечную в обоих направлениях (z, r) плазму, полагая, что вся система находится во внешнем, достаточно сильном магнитном поле B_0 , направленном вдоль скорости сгустка. Мы рассматриваем стационарное состояние системы, когда все ее характеристики являются функциями переменных $\tilde{z} = z - v_0 t$ и r . Ионы плазмы неподвижны, плазма в невозмущенном состоянии нейтральна, а наличие сильного внешнего магнитного поля B_0 приводит к тому, что упорядоченные скорости электронов плазмы имеют только одну составляющую v_{ez} . Искомые электрические поля в системе имеют отличные от нуля компоненты E_z и E_r , а магнитное поле — B_θ . Уравнения, описывающие рассматриваемую систему плазма-пучок, состоят из уравнений Максвелла, уравнений движения и уравнений непрерывности для электронов плазмы. Движение электронов сгустка и распределение их по $\tilde{z}$ и r предполагаются заданными. Плотность электронов сгустка однородна по $\tilde{z}$, а распределение по r выбрано в виде

$$n_b(r) = \begin{cases} n_0 (1 - r^2/a^2), & r \leq a, \\ 0, & r > a \end{cases} \quad 0 \leq \tilde{z} \leq d.$$

Начальная плотность электронов плазмы n_e равна ее плотности на фронте сгустка $n_e(d, r) = n_0$.

Вводя обычным образом потенциалы $\varphi(\tilde{z}, r)$ и $A(\tilde{z}, r)$, принимая условие Лоренца и полагая, что на фронте сгустка $\varphi(d, r) = 0$,

$E(d, r) = 0$, $B(d, r) = 0$, $v_e(d, r) = 0$ получаем для скалярного потенциала уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi e (n_0 - n_e(z, r) - n_b(r)),$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v_0/c$.

Введем безразмерные величины $z_1 = z/\lambda_p$ ($\lambda_p = c/\omega_p$), $r_1 = r/a$, $\chi = 1 + e\varphi/mc^2\gamma^2$. Воспользовавшись вытекающими из нелинейных уравнений движения и непрерывности (с учетом граничных условий) выражениями для электронов плазмы

$$\chi = \sqrt{1 + \rho_e^2} - \beta \rho_e, \quad n_e = \frac{n_0 \beta \sqrt{1 + \rho_e^2}}{\beta \sqrt{1 + \rho_e^2} - \rho_e},$$

где $\rho_e = P_{ez}/mc$ — безразмерный импульс электронов плазмы, мы приходим к следующему уравнению для безразмерного потенциала

$$\frac{\gamma^2 \lambda_p^2}{a^2} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \chi}{\partial r_1} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z_1^2} + \gamma^2 \left[1 - \frac{\beta \chi}{\sqrt{\chi^2 - 1/\gamma^2}} \right] = \frac{n_{b0}}{n_0} (1 - r_1^2). \quad (1)$$

При $a \rightarrow \infty$ мы приходим к уравнению для бесконечного в поперечных направлениях сгустка, решение $\chi_0(z_1)$ которого совпадает с ранее полученными нелинейными решениями [2—3]. Из уравнения (1) сразу видно, что условиями применимости ранее полученных результатов [1—7] будут

$$\frac{\gamma^2 \lambda_p^2}{a^2} \ll 1, \quad \frac{r^2}{a^2} \ll 1. \quad (2)$$

Уточнение этих условий может быть получено нахождением решений уравнения (1).

Условия (2) возникли из-за выбора основного состояния электронов плазмы как точного решения нелинейного уравнения (7) (см. ниже). В работах [9—12] поперечные размеры сгустка учтены в линейном приближении для нерелятивистской плазмы и за основное состояние взято равномерное распределение электронов $n_e = n_0$.

Будем искать поправки к решению $\chi_0(z_1)$, связанные с учетом поперечных размеров сгустка, представив решения уравнения (1) в виде разложений

$$\chi(z_1, r_1) = \chi_1(z_1) + \chi_2(z_1) r_1^2 + \dots, \quad (3)$$

$$\chi_1(z_1) = \chi_0(z_1) + \chi_1^0(z_1) + \dots,$$

при условиях

$$|\chi_1^0| \ll |\chi_0|, \quad |\chi_2| \ll |\chi_0|. \quad (4)$$

В результате, в первом приближении по малым величинам, имеем следующую систему уравнений для χ_1^0 и χ_2 :

$$\frac{d^2 \chi_1^0}{dz_1^2} + \frac{\beta \chi_1^0}{(\chi_0^2 - 1/\gamma^2)^{3/2}} = - \frac{4\gamma^2 \lambda_p^2}{a^2} \chi_2^0(z_1), \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \chi_2}{dz_1^2} + \frac{\beta \chi_2}{(\chi_0^2 - 1/\gamma^2)^{3/2}} = - \frac{n_{b0}}{n_0}, \quad (6)$$

где $\chi_0(z_1)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 \chi_0}{dz_1^2} + \gamma^2 \left[1 - \frac{\beta \chi_0}{\sqrt{\chi_0^2 - 1/\gamma^2}} \right] = \frac{n_{b0}}{n_0}, \quad (7)$$

совпадающим с точным нелинейным уравнением взаимодействия бесконечного в поперечных направлениях сгустка с холодной плазмой [3]. Из первого интеграла уравнения (7) следует $4\gamma^2 \chi_0(z_1) \gtrless 1$, при

$1 - 2 \frac{n_{b0}}{n_0} \ll 1/4\gamma^2$, причем значение $\chi_0 = 1$ потенциал приобретает на

фронте сгустка, тогда как вдали от фронта он велик и на расстояниях $d_0 \approx \frac{8v_0 \gamma^2}{\omega_p}$ равен $\chi_0 \approx 4\gamma^2$. В обратном случае $1 - 2 \frac{n_{b0}}{n_0} \gg 1/4\gamma^2$

интервал изменения χ_0 есть $1/(1 - 2 \frac{n_{b0}}{n_0}) \gtrless \chi_0 \gtrless 1$ и на больших рас-

стояниях от фронта $\chi_0 \approx \left(1 - 2 \frac{n_{b0}}{n_0}\right)^{-1} \gg 1$ при $n_{b0}/n_0 \sim 1/2$. При значениях же $n_{b0}/n_0 \ll 1$ в обоих случаях, практически по всей длине сгустка $\chi_0(z_1) \sim 1$.

Обозначив

$$b(z_1) = \beta / (\chi_0^2(z_1) - 1/\gamma^2)$$

и заметив, что $b(z_1) \approx b \approx 1$ для коротких сгустков $d \ll \lambda_p$, когда значение $\chi_0(z_1)$ мало отличается от значения на фронте сгустка ($0 \leq z_1 \leq d/\lambda_p$), получим следующие решения системы (5) — (6) при значениях $n_{b0}/n_0 \lesssim 1/2$

$$\chi_2(z_1) = - \frac{n_{b0}}{n_0 b} \{1 - \cos \sqrt{b} (d_1 - z_1)\} \leq 0, \quad (8)$$

$$\chi_1^0(z_1) = \frac{4\gamma^2 \lambda_p^2}{a^2} \frac{n_{b0}}{n_0 b^2} \{1 - \cos \sqrt{b} (d_1 - z_1) - \frac{\sqrt{b}}{2} (d_1 - z_1) \sin \sqrt{b} (d_1 - z_1)\},$$

где $d_1 = d/\lambda_p$.

Нетрудно видеть, что эти решения справедливы также и при произвольной длине сгустка в случае $n_{b0}/n_0 \ll 1$. Условия (4), означающие практически условия применимости полученных ранее нелинейных решений для бесконечного, в поперечном направлении, сгустка, в случае коротких сгустков $d \ll \lambda_p$ и $n_{b0}/n_0 \lesssim 1/2$ имеют вид:

$$\frac{n_{b0} d^2}{n_0 \lambda_p^2} \ll 1, \quad \frac{\gamma^2 d^2}{6a^2} \left(\frac{n_{b0} d^2}{n_0 \lambda_p^2} \right) \ll 1, \quad \left(\frac{r}{a} \frac{n_{b0}}{n_0} < 1 \right). \quad (9)$$

Второе из этих условий при больших γ является более жестким. В случае же сгустков произвольной длины условия (4) означают

$$\frac{n_{b0}}{n_0 b} \ll 1, \quad \frac{4 \gamma^2 \lambda_p^2}{a^2} \frac{n_{b0}}{n_0} \ll 1, \quad (10)$$

которые могут быть выполнены за счет малости отношения $n_{b0}/n_0 \ll 1$.

Решение уравнения (7) для $\chi_0(z_1)$ получено в неявном виде и выражается через эллиптические интегралы [3]. Поэтому точное решение системы (5), (6) для произвольных длин сгустка и значений $n_{b0}/n_0 \lesssim 1/2$ затруднительно. Более того, конструкция решений системы содержит коэффициент типа $n_{b0}/n_0 b(z_1)$ и на хвосте длинного сгустка, где $b(z_1) \ll 1$ условия (4) не могут быть выполнены при произвольных n_{b0}/n_0 , т. е. способ решения с помощью разложений (3) непригоден в случае больших длин сгустка и $n_{b0}/n_0 \lesssim 1/2$. Как уже отмечалось, из исходного уравнения (1) следует, что в этом случае решения для бесконечного в поперечных размерах сгустка справедливы при условиях (2)

2. Полученные выше приближенные решения уравнения (1) позволяют определить поля E_z , E_r и B_θ , возникающие внутри сгустка, а также соответствующие силы, действующие на электроны сгустка.

Поля определяются выражениями

$$E_z = \frac{m c \omega_p}{e} \frac{\partial \chi}{\partial z_1}, \quad E_r = - \frac{m c^2 \gamma^2}{e} \frac{\partial \chi}{\partial r} = - \frac{2 m c^2 \gamma^2 r}{e a^2} \chi_2 \geq 0, \quad (11)$$

$$B_\theta = \beta E_r,$$

где потенциал $\chi = \chi_0(z_1) + \chi_1^0(z_1) + \chi_2(z_1) \frac{r^2}{a^2}$.

Силы, в принятой нами цилиндрической системе координат есть

$$f_z = -e E_z = -e \left\{ E_{z0} + E_{z1}^0 + E_{z2} \frac{r^2}{a^2} \right\}, \quad (12)$$

$$f_r = -e E_r + e \beta B_\theta = -e E_r (1 - \beta^2) = \frac{2 m c^2 r}{a^2} \chi_2 \leq 0,$$

где E_{z0} — поле внутри бесконечного в поперечных направлениях сгустка, а $|E_{z1}^0|$ и $|E_{z2}|$ не обязательно малы по сравнению с $|E_{z0}|$, хотя и имеет место условие (4).

Полагая в (8) $d_1 - z_1 \ll 1$ ($d \ll \lambda_p$ — короткие сгустки), имеем

$$f_z \cong -m c \omega_p \frac{n_{b0}}{n_0} \left\{ \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{d - \tilde{z}}{\lambda_p} + \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma^2 \lambda_p^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2} \frac{b}{3!} \right) \frac{(d - \tilde{z})^3}{\lambda_p^3} \right\}, \quad (13)$$

$$f_r \cong -m c \omega_p \frac{\lambda_p r}{a^2} \frac{n_{b0}}{n_0} \frac{(d - \tilde{z})^2}{\lambda_p^2}, \quad \frac{n_{b0}}{n_0} \lesssim \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Здесь, в выражении для f_z , вследствие малости толщины сгустка

$E_{z0} \cong \frac{m c \omega_p}{e} \frac{n_{b0}}{n_0} \frac{d - \tilde{z}}{\lambda_p}$, что следует из общих выражений, полученных в [3] интегрированием (7). Из условий (9) следует, что второй член и f меньше первого при $r/a < 1$ и f_z — всегда тормозящая сила внутри короткого ($d \ll \lambda_p$) сгустка тем большая, чем ближе к оси сгустка и чем больше $\omega_p \sim \sqrt{n_0}$ (а, следовательно, и n_{b0} при $n_{b0}/n_0 \lesssim 1/2$). Фокусирующая же сила f_r мала вследствие условий (12) при произвольных n_0 (т. к. $\lambda_p = c/\omega_p$, $(d - \tilde{z})/\lambda_p \ll 1$).

В случае $n_{b0}/n_0 \ll 1$ и произвольных длинах сгустка максимальная тормозящая сила того же порядка, что и в (13) и определяется величиной E_{z0} . Фокусирующая же сила периодична по длине сгустка и равна

$$f_r \cong -2 m c \omega_p \frac{\lambda_p r}{a^2} \frac{n_{b0}}{n_0} [1 - \cos \sqrt{b} (d_1 - z_1)]. \quad (15)$$

Вопросам самофокусировки релятивистского сгустка электронов, движущегося в плазме (как менее, так и более плотной, чем плотность пучка) посвящено довольно большое количество работ, появившихся в последнее время (см., напр., [9—15]), хотя первоначальные исследования относятся еще к 30-м годам [16].

В работе [14] впервые экспериментально обнаружено явление самофокусировки релятивистского сгустка электронов, проходящего через столб плазмы (там же и в [15] приведены более подробные ссылки на литературу).

Самофокусировка оказывается заметной для узких пучков $\frac{\omega_p a}{v_0} \ll 1$,

когда нейтрализация тока пучка внутри него практически отсутствует и некомпенсированное магнитное поле B приводит к сжатию узкого пучка. Рассматриваемый в настоящей работе случай широких пучков $\omega_p a/v_0 \gg 1$ является наиболее оптимальным для генерации кильватерных продольных волн. Основная задача настоящей заметки состояла в выяснении влияния конечности поперечных размеров пучка на этот процесс (п. 1). Попутно рассмотренный в п. 2 эффект самофокусировки для широких пучков (п. 2) выражен гораздо слабее. Как следует из формул (8), (11), (12), фокусирующий характер радиальной силы f_r (12) не зависит от лоренц-фактора частиц пучка и определяется разностью сил, обусловленных фокусирующим радиальным электрическим полем и дефокусирующим магнитным полем.

Полученные в (п. 2) результаты (13—14) для коротких сгустков и $n_{b0}/n_0 \lesssim 1/2$ являются новыми, т. к. они получены с учетом нелинейных эффектов. Из формулы (15), как уже отмечалось, следует, что фокусирующая сила носит для длинных ($d \gtrsim \lambda_p$) сгустков периодичес-

кий характер; она, в частности, обращается в ноль в точках $z_k = d - \frac{2\pi\lambda_p}{\sqrt{b}}k$, ($k=0,1,2,\dots$), где поперечное (вдоль r) электрическое поле равно нулю.

Амплитуда силы (15) совпадает с соответствующей амплитудой радиальной силы, полученной в линейном приближении в работах [9—13] при условиях $\omega_p a/v_0 \gg 1$, $r \ll a$, которые соответствуют применимости нашего рассмотрения в линейном случае $n_{b0}/n_0 \ll 1$ (см. условие (10)).

Выражения для сил, полученные в пункте 2 настоящей работы, могут быть использованы при рассмотрении динамики частиц сгустка, с учетом принятого ранее допущения о наличии достаточно сильного продольного магнитного поля $B_0 \left(\frac{mc^2\gamma}{eB_0} \ll a \right)$.

В работах [9—14] силы, действующие на электроны пучка, рассчитаны в линейном приближении и для нерелятивистской плазмы. Как можно заметить из вида уравнения (1) для потенциала эти ограничения существенны и могут служить одной из причин того, что полученные в работах [9—14] большие значения фокусирующих полей, при условии узкого сгустка $\omega_p a/v_0 \ll 1$, достигаются лишь при значительных плоскостях сгустка (и, соответственно, плазмы) $n_b \simeq 10^{17} - 10^{20} \text{ см}^{-3}$, которые, возможно, будут получены в областях столкновений при создании пучков линейных коллайдеров следующего поколения.

Приведенные в настоящей заметке результаты говорят о том, что исследование нелинейных эффектов взаимодействия с плазмой релятивистского, ограниченного в поперечных размерах узкого пучка с учетом релятивизма электронов плазмы требует дополнительного специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амагуни А. Ц. и др. Физика плазмы, 5, 85 (1979).
2. Амагуни А. Ц., Сехпосян Э. В., Элбакян С. С. Физика плазмы, 12, 1145 (1986).
3. Амагуни А. Ц., Сехпосян Э. В., Элбакян С. С. Труды XIII Международной конференции по ускорителям частиц высоких энергий. Изд. Наука, Новосибирск, т. 1, с. 175, 1987.
4. Amatuni A. Ts. Proc. of the Workshop on "Role of Plasmas in Accelerators", August 1989, National Lab. for High Energy Physics Tsukuba, Japan, KEK Report 84-14, Oct. 1989.
5. Амагуни А. Ц. и др. ЭЧАЯ, т. 20, вып. 5, стр. 1246. ОИЯИ, Дубна, 1989.
6. Rosenzweig J. B. Phys. Rev. Lett., 88, 555 (1987).
7. Amatuni A. Ts., Elbakian S. S., Sekhposyan E. V. Proc. of European particle acceleration conference EPAC, Rome, June 7-11, 1988, World Sc., vol. 1, p. 499.
8. Амагуни А. Ц., Сехпосян Э. В., Элбакян С. С. Изв. АН АрмССР, Физика, 25, 18 (1990), Препринт ЕФИ-1176 (53)-89.
9. Ruth R. D. et al. Part. Acc. 17, 171 (1985).
10. Wilks S. et al. IEEE Trans. Plasma Sci., v. PS-15, No. 2, p. 210 (1987).
11. Chen P. et al. IEEE Trans. Plasma Sci., Special Issue on Plasma-Based High Energy Accelerators, v. PS-15, No. 2, p. 219 (1987).

12. *Kelnigs R., Jones M. E.* Phys. Fluids, 30 (1), 252 (1987).
13. *Chen P.* Part. Acc. 20, 171 (1986).
14. *Rosenzweig J. B. et al.* Fermilab—Pub—89/213. Phys. Fluids B, Special Issue, 1989.
15. *Whittim D. H. et al.* Preprint LBL—25759, Rev. 2, Lawrence Berkley Laboratory, June 1989. (Submitted to Particle Accelerators).
16. *Bennet W. H.* Phys. Rev., 45, 890 (1934).

ՓՆՋԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՉԱՓՍԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄԸ ՊԼԱԶՄԱՅՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ
ԿԻՎԱՍՏԵՐԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐ ԳՐԳՈՅԼԻՍ

Ս. Յ. ԱՄԱՏՈՒՆԻ, Է. Վ. ՍԵՂՈՍՅԱՆ, Ս. Ս. ԷԼԲԱԿՅԱՆ

Բացահայտված է փնջի լայնական չափսերի ազդեցությունը սլաքմալում ոչ գծային կիլ-վատերային ալիքների զրգուման զործընթացի վրա: Ստացված են արտահայտություններ փնջում առաջացող դաշտերի և լայնական ֆոկուսացնող ուժի համար, որը ազդում է փնջի էլեկտրոնների շարժման վրա:

ALLOWANCE FOR FINITE CROSS SIZE OF AN ELECTRON BUNCN AT THE GENERATION OF NONLINEAR WAKE WAVES. IN PLASMA

A. TS. AMATUNI, E. V. SEKHPOSSYAN, S. S. ELBAKYAN

The influence of finite cross size of a bunch on the process of generation of nonlinear wake waves in plasma is established. Expressions for electric and magnetic fields arising in the bunch as well as for the transverse focusing field acting on the bunched electrons are obtained.

Изв. АН Армении, Физика, т. 25, вып. 6, 313—321 (1990)

УДК 548

СТАТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ПРОЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Р. М. АВАКЯН, Б. В. ХАЧАТРЯН, Э. В. ЧУБАРИАН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 2 апреля 1990 г.)

В рамках проективной теории гравитации найдены аналитические внешние решения в случаях нейтрального и заряженного сферически-симметричного распределения масс. Найдены выражения, связывающие постоянные интегрирования с внутренней структурой центрального тела.

В проективной теории тяготения [1] гравитационное поле определяется, наряду с компонентами g_{ik} метрического тензора, скаляром σ . В общем случае уравнения проективной теории имеют вид