ON THE POSSIBILITY OF USING RAYLEIGH FORMULAE FOR CALCULATIONS OF EXTINCTION AND BACKSCATTERING OF MILLIMETRE AND SUBMILLIMETRE WAVES IN CLOUDS

H. M. AJVAZYAN

The calculations of extinction and backscattering of millimetre and submillimetre waves in clouds were made according to the exact Mie theory and approximate Rayleigh formulas. The results of comparison allowed us to determine the limits of applicability of approximate Rayleigh formulae as well as the errors of these calculations for principal types of clouds.

Изв. АН Армении, Физика, т. 25, вып. 5, 281—288 (1990)

УДК 536

ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОМ ЖИДКОМ КРИСТАЛЛЕ

О. С. ЕРИЦЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 20 января 1990 г.)

Рассмотрено распространение монохроматической электромагнитной волны вдоль оси недиспергирующего холестерического жидкого кристалла вне области дифракционного отражения. Определены потоки энергии, создаваемые пространственными фурье-компонентами волнового поля, которых, как известно — восемь: по четыре компоненты с правой и левой круговой поляризациями. Обсуждена постановка граничной задачи в связи с требованием, согласно которому энергия преломленной волны должна оттекать от границы, а не притекать к ней.

1. Введение. Предварительные соотношения

Волновое поле в холестерическом жидком кристалле (ХЖК), при распространении волны вдоль оси ХЖК, содержит, как известно, четыре пары связанных друг с другом пространственных фурье-компонент: одна из компонент в каждой паре имеет правую круговую поляризацию, другая — левую (см. [1], [2]). Несмотря на то, что оптические исследования ХЖК ведутся давно, вопросам, касающимся энергетических характеристик, не уделяется достаточного внимания. Между тем эти вопросы представляют самостоятельный интерес для электродинамики, так как ХЖК — интересные объекты для этой области. Энергетические соотношения в принципе должны быть вовлечены в рассмотрение также при решении граничных задач. Дело в том, что указание Л. И. Мандельштама о необоснованности производимого обычно отождествления с преломленной той волны, волновой вектор которой направлен в глубь среды, в настоящее время приходится иметь в виду нередко,— и преломленной следует считать ту волну, у которой в глубь среды направлен вектор Пойнтинга, а не волновой вектор. Имеются ситуации ([3], [4]), когда эти два вектора направлены существенно в разные стороны, даже в противоположные, и для любой среды при первом рассмотрении граничных задач, на наш взгляд, следует иметь в виду указание Л. И. Мандельштама — проверить направления потоков энергии. В рассматриваемом здесь конкретном случае имеется и другая причина особого анализа: это присутствие многих пространственных компонент поля.

Пусть параметры ХЖК с осью, параллельной оси z, следующие: σ — шаг спирали, ε_1, ε_2 — главные значения тензора диэлектрической проницаемости в направлении директора и в перпендикулярном ему направлении.

Введем поворачивающиеся оси x', y' так, чтобы ось x' при любом z была параллельна директору, а ось y' была перпендикулярна директору и оси среды [5]. Оси x', y', z составляют правую тройку направлений. Перейдя в волновом уравнении

$$\nabla^2 \mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}(z, t)}{\partial t^2}$$

к компонентам $E'_x(z, t)$, $E'_y(z, t)$ полей, отнесенным к осям x', y' и представив последние в виде

$$E'_{x,y}(z, t) = \sum_m E'_{mx,y} \exp i(K_m z - \omega t),$$

получим $\left(a = \dfrac{2\pi}{\sigma}\right)$:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - K_m^2 - a^2\right)E'_{mx} + 2iaK_m E'_{my} = 0,$$

$$-2iaK_m E'_{mx} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - K_m^2 - a^2\right)E'_{my} = 0. \tag{1}$$

Из (1) получаем:

$$K_m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + 4a^2\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}}. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) содержатся также в [1].

Между компонентами E'_{mx}, E'_{my}, H'_{mx}, H'_{my} имеют место следующие соотношения [6] ($H'_{mx,y}$ — компоненты магнитного поля, отнесенные к осям x', y'):

$$E'_{my} = \alpha_m E'_{mx}, \quad H'_{mx} = \delta_m E'_{mx}, \quad H'_{my} = f_m E'_{mx}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_m = 2iaK_m\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - K_m^2 - a^2\right)^{-1},$$

$$\delta_m = -c\,\omega^{-1}(ia + \alpha_m K_m),$$

$$f_m = c\,\omega^{-1}(K_m - ia\alpha_m). \tag{4}$$

В случае нижнего знака в (2) две из величин K_m (K_3, K_4) обращаются в нуль на частотах ω_1, ω_2, на которых

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 = a^2 \quad \text{и} \quad \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 = a^2.$$

Поэтому соотношения (4) неприменимы на частоте $\omega = \omega_2$. Вблизи этой частоты следует пользоваться соотношениями, получаемыми из (1):

$$E'_{mx} = \alpha'_m E'_{my}, \; H'_{mx} = \delta'_m E'_{my}, \; H'_{my} = f'_m E'_{my},$$

где

$$\alpha'_m = -2iaK_m\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - K_m^2 - a^2\right)^{-1},$$

$$\delta'_m = -c\,\omega^{-1}(ia\alpha'_m + K_m),$$

$$f'_m = c\,\omega^{-1}(K_m\alpha'_m - ia).$$

2. Спектр пространственных фурье — компонент

В системе x', y', z имеются четыре пространственных компоненты поля, в соответствии с четырьмя значениями K_m. Перейдя к системе осей x, y, z, будем иметь (для левозакрученного ХЖК):

$$\mathbf{E}(z,t) = \sum_{m=1}^{4} \{[\mathbf{x}^0(\cos az + iA_m \sin az) + $$

$$+ \mathbf{y}^0(iA_m\cos az - \sin az)]E'_{mx}\exp i(K_m z - \omega t),$$

где A_m связаны с α_m соотношениями $\alpha'_m = iA_m$, $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ — орты осей x, y.

Пользуясь соотношениями

$$A_m = \frac{1+A_m}{2} - \frac{1-A_m}{2}, \qquad \frac{1+A_m}{2} + \frac{1-A_m}{2} = 1,$$

получаем

$$\mathbf{E}(z,t) = \sum_{m=1}^{4}\mathbf{E}_m^+(z,t) + \sum_{m=1}^{4}\mathbf{E}_m^-(z,t),$$

$$\mathbf{E}_m^{\pm}(z,t) = (\mathbf{x}^0 \pm i\mathbf{y}^0)\cdot\frac{1\pm A_m}{2}E'_{mx}\cdot\exp i((K_m + a)z - \omega t). \qquad (5)$$

Таким образом, имеем четыре пространственных компоненты с левой круговой поляризацией, амплитуды которых равны $\frac{1+A_m}{2}E'_{mx}$, а z — компоненты волновых векторов $k_m^+ = K_m + a$, и четыре пространственных компоненты с правой круговой поляризацией, амплитуды которых равны $\frac{1-A_m}{2}E'_{mx}$ а z — компоненты волновых векторов $k_m^- = K_m - a$.

Магнитное поле также может быть представлено в виде (5). Действительно, с помощью (3), (4) можно написать

$$H'_{mx} = i\,b_m E'_{mx},\quad b_m = -c\,\omega^{-1}(a + A_m K_m),$$
$$H'_{my} = l_m E'_{mx},\quad l_m = c\,\omega^{-1}(K_m + a K_m), \tag{6}$$

и для магнитного поля будем иметь:

$$\mathbf{H}(z,t) = \{[\mathbf{x}^0 \sum_{m=1}^{4} (i\,b_m E'_{mx} \cos a z + l_m \sin a z) +$$
$$+ \mathbf{y}^0 \sum_{m=1}^{4} (l_m E'_{mx} \cos a z - i\,b_m E'_{mx} \sin a z)] \exp i(K_m z - \omega t)\} =$$
$$= \{[\mathbf{x}^0 \sum_{m=1}^{4} (i \frac{b_m}{l_m} \cos a z + \sin a z)\, l_m E'_{mx} \exp i(K_m z - \omega t)] +$$
$$+ [\mathbf{y}^0 \sum_{m=1}^{4} (\cos a z - i \frac{b_m}{l_m} \sin a z)\, l_m E'_{mx} \exp i(K_m z - \omega t)]\} = \tag{7}$$
$$= \sum_{m=1}^{4} \mathbf{H}_m^+(z,t) + \sum_{m=1}^{4} \mathbf{H}_m^-(z,t),\quad \mathbf{H}_m^\pm(z,t) =$$
$$= \mp (\mathbf{x}^0 \mp \mathbf{y}^0) \frac{1 \mp b_m/l_m}{2}\, i\, l_m E'_{mx} \exp i((K_m \pm a)z - \omega t).$$

Согласно (6) и (7), для любого фиксированного значения z-компоненты волнового вектора поляризация магнитного поля совпадает с поляризацией электрического поля.

Волны с z — компонентой волнового вектора $k_m^+ = K_m + a$ имеют поляризацию

$$E_{my}^+ = i\,E_{mx}^+,\quad m = 1,2,3,4,$$

а волны с z — компонентой волнового вектора $k_m^- = K_m - a$ имеют поляризацию

$$E_{my}^- = -\,i\,E_{mx}^-,\quad m = 1,2,3,4$$

(см. (5)).

3. Потоки энергии

Электрическое (и магнитное) поле содержит, согласно (5) и (7), четыре пространственных компоненты с правой круговой поляризацией и четыре — с левой круговой поляризацией, как уже сказано выше. Поэтому поток энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi}\Big[\Big(\sum_{m=1}^{4} \mathbf{E}_m^+(z,t) + \sum_{m=1}^{4} \mathbf{E}_m^-(z,t)\Big) \times$$
$$\times \Big(\sum_{m=1}^{4} \mathbf{H}_m^+(z,t) + \sum_{m=1}^{4} \mathbf{H}_m^-(z,t)\Big)\Big]$$

содержит, вообще говоря, 64 произведения типа

$$[\mathbf{E}_{m1}^+\,\mathbf{H}_{m2}^+],\ [\mathbf{E}_{m1}^+\,\mathbf{H}_{m2}^-],\ [\mathbf{E}_{m1}^-\,\mathbf{H}_{m2}^+],\ [\mathbf{E}_{m1}^-\,\mathbf{H}_{m2}^-].$$

Можно убедиться, что произведения, в которых поляризации электрического и магнитного полей не совпадают, тождественно равны нулю, как и следовало ожидать на основании взаимной ортогональности правой и левой круговой поляризаций. Поэтому остаются только те потоки, которые формируются пространственными компонентами электрического и магнитного полей одинаковой поляризации:

$$[\mathbf{E}^{+}_{m1}\,\mathbf{H}^{+}_{m2}],\ [\mathbf{E}^{-}_{m1}\,\mathbf{H}^{-}_{m2}].$$

Обозначим через $\overline{S}^{+}_{zm_1,\,m_2}$ сумму z — компонент усредненых по периоду световой волны [3] потоков энергии, созданных: а) полями $\mathbf{E}^{+}_{m1}(z,t)$ и $\mathbf{H}^{+}_{m2}(z,t)$ и б) полями $\mathbf{E}^{+}_{m2}(z,t)$ и $\mathbf{H}^{+}_{m1}(z,t)$, при фиксированных m_1 и m_2. Будем иметь ($m_1 \neq m_2$):

$$\overline{S}^{+}_{zm_1,\,m_2} = \frac{c}{16\pi}\,\mathrm{Re}\,\{(1+A_{m1})(l^{*}_{m2}-b^{*}_{m2})\exp i(K_{m1}-K_{m2})\,z \times$$

$$\times E'_{m1x}E''^{*}_{m2x} + (1+A_{m2})(l^{*}_{m1}-b^{*}_{m1})\exp i(K_{m2}-K_{m1})\,z\cdot E'_{m2x}E''^{*}_{m1x}\}.$$

Сумма z — компонент усредненых по периоду световой волны потоков энергии, один из которых определяется полями $\mathbf{E}^{-}_{m1}(z,t)$ и $\mathbf{H}^{-}_{m2}(z,t)$, а второй — полями $\mathbf{E}^{-}_{m2}(z,t)$ и $\mathbf{H}^{-}_{m1}(z,t)$, равна ($m_1 \neq m_2$):

$$\overline{S}^{-}_{zm1,\,m2} = \frac{c}{16\pi}\,\mathrm{Re}\,\{(1-A_{m1})(l^{*}_{m2}+b^{*}_{m2})\exp i(K_{m1}-K_{m2})\,z \times$$

$$\times E'_{m1x}E''^{*}_{m2x} + (1-A_{m2})(l^{*}_{m1}+b^{*}_{m1})\exp i(K_{m2}-K_{m1})\,z\,E'_{m2x}E''^{*}_{m1x}\}.$$

Величины $\overline{S}^{\pm}_{zm1,\,m2}$, вообще говоря, зависят от координаты z, и по амплитуде являются величинами, не превышающими по порядку $\frac{c}{4\pi}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E'_{m1x}E''^{*}_{m2x}$. Среди них имеются и величины порядка

$$((\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))^2 \text{ (это } \overline{S}^{-}_{2,3} \text{ и } \overline{S}^{+}_{1,4}\text{)};\ \overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}.$$

Приведенные выше потоки — интерференционные.

Потоки, определяемые полями $\mathbf{E}^{+}_{m}(z,t)$ и $\mathbf{H}^{+}_{m}(z,t)$ (неинтерференционные потоки) в нулевом приближении по параметру $\delta = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ равны

$$\overline{S}^{+}_{z2,2} = -\frac{c}{4\pi}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,|E'_{2x}|^2,$$

$$\overline{S}^{+}_{z3,3} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,|E'_{3x}|^2, \qquad (8)$$

а $\overline{S}^{+}_{z1,1}$ и $\overline{S}^{+}_{z4,4}$ — пропорциональны δ^2.

Потоки, определяемые полями $\mathbf{E}^{-}_{m}(z,t)$ и $\mathbf{H}^{-}_{m}(z,t)$ (также неинтерференционные), равны

$$\overline{S}^{-}_{z1,1} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,|E'_{1x}|^2,$$
$$\overline{S}^{-}_{z4,4} = -\frac{c}{4\pi}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,|E'_{4x}|^2, \tag{9}$$

а потоки $\overline{S}^{-}_{z2,2}$ и $\overline{S}^{-}_{z3,3}$ — пропорциональны δ^2.

Таким образом, имеются всего четыре потока, которые в данном приближении ($\delta = 0$) отличны от нуля:

$$\overline{S}^{-}_{1} = \overline{S}^{-}_{z1,1},\ \overline{S}^{+}_{2} = \overline{S}^{+}_{z2,2},\ \overline{S}^{+}_{3} = \overline{S}^{+}_{z3,3},\ \overline{S}^{-}_{4} = \overline{S}^{-}_{z4,4}. \tag{10}$$

Для z—компонент волновых векторов имеем:

$$k^{-}_{1} = K_1 - a,\ k^{+}_{2} = K_2 + a,\ k^{+}_{3} = K_3 + a,\ k^{-}_{4} = K_4 - a. \tag{11}$$

Велинины $K_{1,2}$ можно заменить на $\pm\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\overline{\varepsilon}} + a\right)$, если пренебречь величинами порядка δ^2. Вдали от области дифракционного отражения в указанном приближении можно сделать также замену $K_{3,4} \to \pm\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\overline{\varepsilon}} - a\right)$. Тогда будем иметь:

$$k^{+}_{2} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\overline{\varepsilon}},\ k^{+}_{3} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\overline{\varepsilon}},\ k^{-}_{1} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\overline{\varepsilon}},\ k^{-}_{4} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\overline{\varepsilon}}. \tag{12}$$

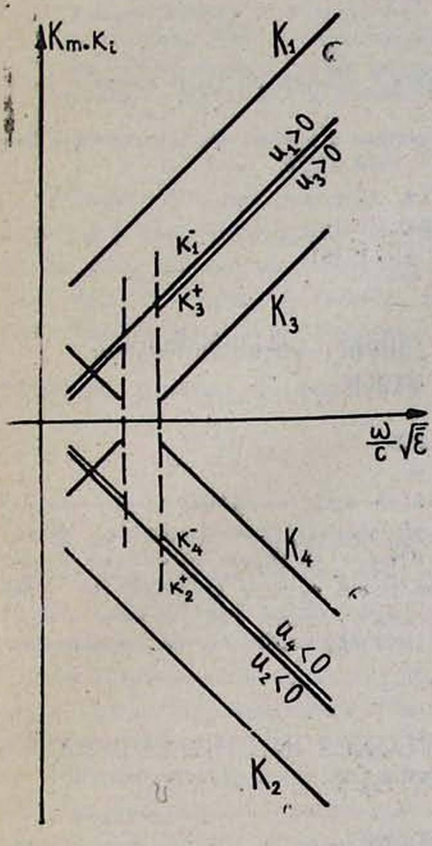
Как следует из (8) - (12), знаки $\overline{S}^{-}_{1}$, $\overline{S}^{+}_{2}$, $\overline{S}^{+}_{3}$, $\overline{S}^{-}_{4}$ совпадают со знаками k^{-}_{1}, k^{+}_{2}, k^{+}_{3}, k^{-}_{4}, т. е. потоки энергии, не содержащие малого параметра δ как множителя, по направлению совпадают с соответствующими волновыми векторами. В соответствии с этим при нормальном падении света из вакуума на границу ХЖК, занимающего полупространство $z \geqslant 0$, возбуждаемым в среде волнам соответствуют волновые векторы $\mathbf{k}^{-}_{1}$ и $\mathbf{k}^{+}_{3}$. В силу соотношения $\operatorname{Im}\varepsilon \geqslant 0$ присутствие истинного поглощения приводит к затуханию указанных волн при удалении от границы в глубь среды ($\operatorname{Im} k^{-}_{1} \geqslant 0$, $\operatorname{Im} k^{+}_{3} \geqslant 0$), то есть требования, чтобы энергия утекала от границы и чтобы преломленные волны затухали при удалении от границы (а не нарастали), приводят к одному и тому же результату в смысле того — какие волны следует выбрать как преломленные.

4. Геометрическая интерпретация. Групповые скорости

Полученные результаты могут быть интерпретированы с помощью известных кривых зависимости K_m от ω. На рисунке показаны эти кривые.

Величины $\partial\omega/\partial k$ имеют разные знаки. У $\frac{\partial\omega}{\partial k^{+}_{3}}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial k^{-}_{1}}$ они поло-, жительны, у $\dfrac{\partial\omega}{\partial k_2^+}$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial k_4^-}$ — отрицательны. Таким образом, знаки $\dfrac{\partial\omega}{\partial k_1^-}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial k_2^+}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial k_3^+}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial k_4^-}$ совпадают со знаками $\overline{S}_1^-$, $\overline{S}_2^+$, $\overline{S}_3^+$, $\overline{S}_4^-$, и имеют место соотношения:

$$\overline{S}_1^- = \frac{\overline{\varepsilon}}{4\pi}|E'_{1x}|^2\cdot\frac{\partial\omega}{\partial k_1^-}, \qquad \overline{S}_2^+ = \frac{\overline{\varepsilon}}{4\pi}|E'_{2x}|^2\cdot\frac{\partial\omega}{\partial k_2^+},$$
$$\overline{S}_3^+ = \frac{\overline{\varepsilon}}{4\pi}|E'_{3x}|^2\cdot\frac{\partial\omega}{\partial k_3^+}, \qquad \overline{S}_4^- = \frac{\overline{\varepsilon}}{4\pi}|E'_{4x}|^2\cdot\frac{\partial\omega}{\partial k_4^-}. \tag{13}$$



Частотный ход величин K_m, а также k_1^-, k_2^+, k_3^+, k_4^-,—в принятом в тексте приближении представляется прямыми. Область дифракционного отражения выделена вертикальными пунктриными прямыми.

Прямая k_3^+ (k_4^-) показана смещенной от прямой k_1^- (k_2^+) для наглядности.

С помощью (5) и (6) можно убедиться, что $(\overline{\varepsilon}/4\pi)|E'_{mx}|^2$ — плотности энергии для волн с z — компонентами волновых векторов, равными k_1^-, k_2^+, k_3^+, k_4^- при $m = 1,2,3,4$ соответственно. Поэтому, согласно (13), величины $\partial\omega/\partial k_l$ ($k_l = k_1^-$, k_2^+, k_3^+, k_4^-) следует отождествлять с групповой скоростью соответствующей волн

$$u_l = \frac{\partial\omega}{\partial k_l}.$$

Согласно (11)

$$\frac{\partial\omega}{\partial K_1^-}=\frac{\partial\omega}{\partial K_1},\quad \frac{\partial\omega}{\partial k_2^+}=\frac{\partial\omega}{\partial K_2},\quad \frac{\partial\omega}{\partial k_3^+}=\frac{\partial\omega}{\partial K_3},\quad \frac{\partial\omega}{\partial k_4^-}=\frac{\partial\omega}{\partial K_4}.$$

Полученные соотношения справедливы вне области дифракционного отражения вдали от ее границ, когда в K_m не учитываются величины, пропорциональные δ^2, а в потоках энергии и в плотности энергии ограничиваются нулевыми по δ членами.

Выражаю свою глубокую благодарность Б. М. Болотовскому за ценную беседу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кац Е. И.* ЖЭТФ, 59, 1854 (1970).
2. *Чандрасекар С.* Жидкие кристаллы: пер. с англ. / под ред. А. А. Веденова и И. Г. Чистякова. Изд. Мир, М., 1980, 344 с.
3. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. Наука, М., 1979, 432 с.
4. *Ерицян О. С.* Кристаллография, 33, 461 (1978).
5. *Oseen C. W.* Trans. Farad. Soc., 1933, 29, 883 (1933).
6. *Ерицян О. С.* Изв. АН АрмССР, Физика, 13, 83 (1978).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՀՈՍՔԵՐԸ ԽՈԼԵՍՏԵՐԻՆԱՅԻՆ ՀԵՂՈՒԿ ԲՅՈՒՐԵՂՈՒՄ

Հ. Ս. ԵՐԻՑՅԱՆ

Քննարկված է մոնոքրոմատիկ էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածումը առանց դիսպերսիայի խոլեստերինային հեղուկ բյուրեղի առանցքով, դիֆրակցիոն անդրադարձման տիրույթից դուրս գտնվող հաճախությունների համար։ Որոշված են դաշտի տարածական ֆուրյե-կոմպոնենտների ստեղծած հոսքերը. ինչպես հայտնի է, ուժ այդպիսի կոմպոնենտ կա՝ չորսն աջ բևեռացած, չորսը՝ ձախ։ Քննարկված է սահմանային խնդիրն այն պահանջի առնչությամբ, ըստ որի ընկված ալիքի էներգիան պետք է սահմանից հեռանա, ոչ թե դեպի այն հոսի։

ELECTROMAGNETIC ENERGY FLUXES IN CHOLESTERIC LIQUID CRYSTALS

H. S. ERITSYAN

The propagation of monochromatic electromagnetic wave along nondispersive cholesteric liquid crystal axis is considered for frequencies out of diffraction reflection band. Energy fluxes due to spatial Fourier-components of the wave field are determined.