

УДК 530.145

СУПЕРПРОСТРАНСТВА С ДВУМЯ КАНОНИЧЕСКИМИ 2-ФОРМАМИ РАЗЛИЧНОЙ ЧЕТНОСТИ И СТРАННАЯ СУПЕРАЛГЕБРА $UQ(N)$

А. П. НЕРСЕСЯН, О. М. ХУДАВЕРДЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 22 февраля 1989 г.)

Найдены векторные поля, сохраняющие одновременно четную и нечетную невырожденные замкнутые канонические 2-формы на суперпространствах и вычислена супералгебра Ли этих полей.

1. На суперпространствах размерности $(2N, 2N)$, наряду с четной относительно грассмановой градуировки симплектической структурой, задающей четную скобку Пуассона, можно определить нечетную симплектическую структуру, задающую нечетную скобку Пуассона (скобку Бюттен) [1], которая, несмотря на широкое применение при квантовании произвольных калибровочных теорий [2], и в механике сплошных сред [3], остается в физике экзотическим объектом. В работах [4], [5] исследовался вопрос о возможности описания суперсимметричной механики, задаваемой четным гамильтонианом H и четной скобкой Пуассона $\{, \}_0$, нечетным гамильтонианом $\bar{H}$ и нечетной скобкой Пуассона $\{, \}_1$, то есть построения таких $\bar{H}$, $\{, \}_1$, что

$$\{H, x^A\}_0 = \{\bar{H}, x^A\}_1, \quad (1)$$

где x^A — координаты фазового суперпространства.

Этот вопрос исследовался в связи с выдвинутой в [6], [7] гипотезой о том, что нечетная скобка Пуассона может играть в физике фундаментальную роль. Поэтому представляется интересным изучение суперпространств, наделенных одновременно четной и нечетной симплектическими структурами.

Согласно теореме Дарбу для супермногообразий [8], произвольная четная симплектическая структура, заданная на суперпространстве размерности $(2N, M)$, координатным преобразованием приводится к виду

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^N dx^k \wedge dx^{k+N} + \sum_{\alpha=1}^M \varepsilon_{\alpha} d\theta^{\alpha} \wedge d\theta^{\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1, \quad (2)$$

а нечетная симплектическая структура (она существует лишь на суперпространствах размерности (L, L)) — к виду

$$\omega_1 = \sum_{m=1}^L dx^m \wedge d\theta^m, \quad (3)$$

Заметим, что одновременное приведение четной и нечетной симплектических структур к виду (2), (3), вообще говоря, невозможно, поскольку, согласно доказанной в [9] лемме, пространство векторных полей, сохраняющих одновременно четную и нечетную симплектические структуры, конечномерно.

Ниже мы полностью опишем это пространство для частного случая двух симплектических структур, одновременно приводящихся к виду (2) с $\varepsilon_a = 1$ и (3).

2-форме (2) с $\varepsilon_a = 1$ соответствует четная скобка Пуассона

$$\{p^k, q^m\}_0 = \delta^{km}, \{\theta^\alpha, \theta^\beta\}_0 = \delta^{\alpha\beta}, \{p^k, \theta^\alpha\}_0 = \{q^k, \theta^\alpha\}_0 = 0, \quad (4)$$

2-форме (3) соответствует нечетная скобка Пуассона

$$\{p^k, \theta^\alpha\}_1 = \{q^k, \theta^{\alpha+N}\}_1 = \delta^{k\alpha}, \{p^k, q^m\}_1 = \{\theta^\alpha, \theta^\beta\}_1 = 0, \quad (5)$$

где p^k, q^m ($k, m = 1, \dots, N$) четные, θ^α ($\alpha = 1, \dots, 2N$) нечетные координаты $(2N, 2N)$ мерного суперпространства.

Нахождение векторных полей V^A , сохраняющих одновременно симплектические структуры различной четности, очевидно, равносильно нахождению пар функций $(H, \bar{H})$, удовлетворяющих уравнению (1), где $\{, \}_0, \{, \}_1$ — скобки Пуассона, соответствующие этим симплектическим структурам.

V^A связаны с H и $\bar{H}$ выражением

$$V^A = \{H, x^A\}_0 = \{\bar{H}, x^A\}_1.$$

Во втором разделе найдены векторные поля, сохраняющие 2-формы (2) с $\varepsilon_a = 1$ и (3). Ограничение $\varepsilon_a = 1$ и комплексные координаты, которые применяются ниже, применяются лишь для облегчения вычислений. Процедура вычисления естественным образом обобщается для векторных полей, сохраняющих неканонические 2-формы.

В третьем разделе вычислена супералгебра этих векторных полей, она, оказывается содержит странную супералгебру $\bar{UQ}(N)$. Показано, что гамильтониан общего положения, генерирующий найденные векторные поля, преобразованием, сохраняющим обе симплектические структуры, сводится либо к гамильтониану набора одномерных виттеновских осцилляторов с различными частотами (для четных векторных полей), либо к его суперзаряду (для нечетных полей).

2. Введем комплексные координаты

$$z^k = \frac{p^k + i q^k}{\sqrt{2}}, \quad z^{*k} = \frac{p^k - i q^k}{\sqrt{2}},$$

$$\eta^k = \frac{\theta^k + i \theta^{k+N}}{\sqrt{2}}, \quad \eta^{*k} = \frac{\theta^k - i \theta^{k+N}}{\sqrt{2}}.$$

В этих координатах уравнения (1.1) со скобками Пуассона (1.4) и (1.5) принимают вид:

$$i \partial_0 H = (-1)^{p(H)} \partial_1 \bar{H}, \quad (-1)^{p(H)} \partial_1 H = \partial_0 \bar{H}, \quad (1)$$

$$-i \partial_0^* H = (-1)^{p(H)} \partial_1^* \bar{H}, \quad (-1)^{p(H)} \partial_1^* H = \partial_0^* \bar{H},$$

$$\text{где } (\partial_0)_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, (\partial_1)_k = \frac{\partial}{\partial \eta^k}, (\partial_0^*)_k = \frac{\partial}{\partial z^{*k}}, (\partial_1^*)_k = \frac{\partial}{\partial \eta^{*k}}.$$

Так как η^k, η^{*k} — антикоммутирующие переменные, то произвольная функция $A(z, z^*, \eta, \eta^*)$ имеет вид

$$A(z, z^*, \eta, \eta^*) = \sum_{m,n=0}^N A_{m,n} = \sum_{\substack{m,n=0 \\ \{k_m\} \{l_n\}}}^N A(z, z^*)_{k_1 \dots k_m l_1 \dots l_n} \times \\ \times \eta^{k_1} \dots \eta^{k_m} \eta^{*l_1} \dots \eta^{*l_n};$$

Если $A(z, z^*, \eta, \eta^*)$ имеет определенную четность, то

$$p(A) = p(A_{m,n}) = (m+n) \bmod 2. \quad (2)$$

Если $A(z, z^*, \eta, \eta^*)$ вещественна, то $A_{m,n} = A_{n,m}^*$.

Поэтому уравнения (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} i \partial_0 H_{n,m} &= (-1)^{p(H)} \partial_1 \bar{H}_{n+1,m}, \\ -i \partial_0^* H_{n,m} &= (-1)^{p(H)} \partial_1^* \bar{H}_{n,m+1}, \\ (-1)^{p(H)} \partial_1 H_{n,m} &= \partial_0 \bar{H}_{n-1,m}, \\ (-1)^{p(H)} \partial_1^* H_{n,m} &= \partial_0^* \bar{H}_{n,m-1}. \end{aligned} \quad (1a)$$

Поскольку $(\partial_1)_k ((\partial_1^*)_k)$ означает просто вычеркивание вынесенного влево $\eta^k (\eta^{*k})$, то из (1a) с необходимостью следует

$$\begin{aligned} \bar{H}_{m+1,n} &= \frac{i(-1)^{p(H)}}{m+1} (\eta \cdot \partial_0) H_{m,n}, \\ \bar{H}_{m,n+1} &= \frac{-i(-1)^{p(H)}}{n+1} (\eta \cdot \partial_0)^* H_{m,n}, \\ H_{m,n} &= \frac{(-1)^{p(H)}}{m} (\eta \cdot \partial_0) \bar{H}_{m-1,n}, \quad H_{m,n} = \frac{(-1)^{p(H)}}{n} (\eta \cdot \partial_0)^* \bar{H}_{m,n-1}, \\ \text{где } (\eta \cdot \partial_0) &= \sum_{k=1}^N \eta^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad (\eta \cdot \partial_0)^* = \sum_{k=1}^N \eta^{*k} \frac{\partial}{\partial z^{*k}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти рекуррентные формулы позволяют выразить все $H_{m,n}, \bar{H}_{m,n}$, через $H_{0,0} \equiv H_0$ при $p(H)=0$, и $\bar{H}_{0,0} \equiv \bar{H}_0$ при $p(H)=1$.

Рассмотрим оба случая:

$$a) \quad p(H)=0.$$

Из (2) имеем

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{1,1} + H_{2,0} + H_{0,2} + \dots, \\ \bar{H} &= \bar{H}_{1,0} + \bar{H}_{0,1} + \bar{H}_{2,1} + \bar{H}_{1,2} + \dots. \end{aligned}$$

Тогда из выражений (3) получаем

$$\begin{aligned}\bar{H}_{0,1} &= -i(\eta \cdot \partial_0)^* H_0, & \bar{H}_{1,0} &= \bar{H}_{0,1}^* = i(\eta \cdot \partial_0) H_0, \\ H_{1,1} &= (\eta \cdot \partial_0) H_{0,1} = -i(\eta \cdot \partial_0) (\eta \cdot \partial_0)^* H_0.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\eta \cdot \partial_0) (\eta \cdot \partial_0) f &\equiv \sum_{k,n=1}^N \eta^k \eta^n \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial z^n} = 0, \\ (\eta \cdot \partial_0)^* (\eta \cdot \partial_0)^* f &= \sum_{k,n=1}^N \eta^{*k} \eta^{*n} \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*k} \partial z^{*n}} = 0,\end{aligned}$$

для произвольной гладкой функции $f(z, z^*)$, то все остальные $H_{m,n}$, $\bar{H}_{m,n}$ равны нулю.

Подставив полученные выражения для $H_{m,n}$, $\bar{H}_{m,n}$ в (1а) (так как (3) есть следствие (1а)), получим условия на H_0 :

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial z^k \partial z^n} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial z^{*k} \partial z^{*n}} = 0.$$

Учитывая, что H_0 — вещественная, получаем

$$H_0 = \sum_{m,n=1}^N a_{mn} z^m z^{*n} + \sum_{m=1}^N (b_m z^m + b_m^* z^{*m}),$$

где $a_{mn} = a_{nm}^*$ — эрмитова матрица, и, окончательно,

$$\begin{aligned}H &= \sum_{m,n=1}^N a_{mn} (z^m z^{*n} - i \eta^m \eta^{*n}) + \sum_{m=1}^N (b_m z^m + b_m^* z^{*m}), \\ \bar{H} &= i \sum_{m,n=1}^N a_{mn} (\eta^m z^{*n} - z^m \eta^{*n}) + i \sum_{m=1}^N (b_m \eta^m - b_m^* \eta^{*m}).\end{aligned}\quad (4)$$

Гамильтонианы (4) генерируют четное векторное поле

$$V_0 = i \sum_{k,n=1}^N \left[\left(z^k a_{kn} + b_n \right) \frac{\partial}{\partial z^n} + \eta^k a_{kn} \frac{\partial}{\partial \eta^n} \right]. \quad (5)$$

б) $p(H) = 1$.

Согласно (3) имеем

$$\begin{aligned}H &\equiv Q = H_{1,0} + H_{0,1} + H_{1,2} + H_{2,1} \dots, \\ \bar{H} &\equiv \bar{Q} = \bar{H}_0 + \bar{H}_{1,1} + \bar{H}_{2,0} + \bar{H}_{0,2} + \dots.\end{aligned}$$

Проделав вычисления, аналогичные вычислениям пункта а), получим

$$\begin{aligned}\bar{H} &\equiv \bar{Q} = \sum_{m,n=1}^N a_{mn} (z^m z^{*n} + i \eta^m \eta^{*n}) + \sum_{m=1}^N (b_n z^n + b_n^* z^{*n}), \\ H &= Q = - \sum_{m,n=1}^N a_{mn} (z^m \eta^{*n} + \eta^m z^{*n}) - \sum_{m=1}^N (b_n \eta^n + b_n^* \eta^{*n}).\end{aligned}\quad (6)$$

Гамильтонианы (6) генерируют нечетное векторное поле

$$V_1 = -i \sum_{m,n=1}^N a_{nm} \left[\eta^n \frac{\partial}{\partial z^m} + z^n \frac{\partial}{\partial \eta^m} \right] + \sum_{m=1}^N b_m \frac{\partial}{\partial \eta_m}. \quad (7)$$

3. Выберем некоторый базис $\{\tilde{\sigma}_{nm}^a\}$, по которому разлагаются матрицы $i a_{nm}$, выделим в нем бесследовые матрицы:

$$\left\{ \tilde{\sigma}_{nm}^{a'} \right\} = \left\{ \tilde{\sigma}_{nn}^0 = i \delta_{nn}; \sigma_{nm}^a = \tilde{\sigma}_{nm}^a - \frac{\text{Tr } \tilde{\sigma}^a}{N} \delta_{nm} \right\}.$$

Ясно, что $\left\{ \tilde{\sigma}_{nm}^{a'} \right\}$ образуют базис в алгебре $u(N)$, а $\left\{ \tilde{\sigma}_{nm}^a \right\}$ — в алгебре $su(N)$.

Тогда поля (2.5) и (2.7) разлагаются по такому базису:

$$\begin{aligned} V_0^0 &= i \sum_{m=1}^N \left(z^m \frac{\partial}{\partial z^m} + \eta^m \frac{\partial}{\partial \eta^m} \right), \\ V_1^0 &= i \sum_{m=1}^N \left(z^m \frac{\partial}{\partial \eta^m} + \eta^m \frac{\partial}{\partial z^m} \right), \\ V_0^a &= \sum_{m,n=1}^N \sigma_{mn}^a \left(z^m \frac{\partial}{\partial z^n} + \eta^m \frac{\partial}{\partial \eta^n} \right), \\ V_i^a &= \sum_{m,n=1}^N \sigma_{mn}^a \left(z^m \frac{\partial}{\partial \eta^n} + \eta^m \frac{\partial}{\partial z^n} \right), \\ v_0^k &= \frac{\partial}{\partial z^k}, \\ v_1^k &= \frac{\partial}{\partial \eta^k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Они образуют следующую супералгебру Ли относительно (анти) коммутирования (здесь и далее $\alpha, \beta = 0, 1$)

$$[v_\alpha^k, v_\beta^n] = 0,$$

$$[v_\alpha^k, V_\beta^0] = i v_{(\alpha+\beta)/\text{mod } 2}^k,$$

$$[v_\alpha^k, V_\beta^a] = (-1)^\alpha \sum_c \sigma_{kl}^a v_{(\alpha+\beta)/\text{mod } 2}^l,$$

$$[V_\alpha^0, V_\beta^0] = (1 - (-1)^{\alpha \cdot \beta}) V_0^0,$$

$$[V_\alpha^0, V_\beta^a] = (1 - (-1)^{\alpha \cdot \beta}) V_0^a,$$

$$[V_\alpha^a, V_\beta^b] = \sum_c r_{\alpha \cdot \beta}^{abc} V_{(\alpha+\beta)/\text{mod } 2}^c + (1 - (-1)^{\alpha \cdot \beta}) \frac{\text{Tr}(\sigma^a \sigma^b)}{N} V_0^0,$$

где $r_{\alpha \cdot \beta}^{abc}$ определяется из условия,

$$\sum_c r_{\alpha \cdot \beta}^{abc} \sigma_{kn}^c = \sum_{l=1}^N (\sigma_{kl}^a \sigma_{ln}^b - (-1)^{\alpha \cdot \beta} \sigma_{kl}^b \sigma_{ln}^a) + (1 - (-1)^{\alpha \cdot \beta}) \frac{\text{Tr}(\sigma^a \sigma^b)}{N} \delta_{kn},$$

Как видим, генераторы трансляций v_x^k образуют в супералгебре Ли (2) коммутативный идеал. Векторы V_0^0, V_x^a образуют в супералгебре Ли (2) идеал, который, как нетрудно заметить, является странной супералгеброй $\tilde{UQ}(N)$, она содержит в качестве центра V_0^0 . Профакторизовав по нему, получим классическую супералгебру $UQ(N)$ 10].

Преобразование вида

$$z'^k = \sum_{n=1}^N U_n^k z^n + c^k, \quad p(c^k) = 0,$$

$$\eta'^k = \sum_{n=1}^N U_n^k \eta^n + d^k, \quad p(d^k) = 1,$$

где c^k, d^k — произвольные комплексные числа, а U_n^k — унитарные матрицы: $\sum_{k=1}^N U_n^k U_m^{*k} = \delta_{nm}$, сохраняет обе симплектические структуры.

Подходящим выбором U_n^k и d^n, c^n , либо H и $\bar{H}$ приводятся к виду:

$$H = \sum_{k=1}^N \lambda_k (z^k z^{*k} - i \eta^k \eta^{*k}), \quad \bar{H} = i \sum_{k=1}^N \lambda_k (\eta^k z^{*k} - \eta^{*k} z^k),$$

либо $Q, \bar{Q}$ — к виду

$$Q = \sum_k \lambda_k (z^k \eta^{*k} + z^{*k} \eta^k), \quad \bar{Q} = \sum_k \lambda_k (z^k z^{*k} + i \eta^k \eta^{*k}).$$

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Р. Л. Мкртчяну за постоянные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейтес Д. А. Теория супермногообразий, Петрозаводск, 1983.
2. Batalin I. A., Vilkovisky G. A. Phys. Lett., B102, 27 (1981).
3. Kupershmidt B. A. Lett. Math. Phys., 9, 323 (1985).
4. Волков Д. В., Пашнев А. И., Сорока В. А., Ткач В. И. Письма в ЖЭТФ, 44, 55 (1985).
5. Khudaverdyan O. M., Nersisyan A. P. Preprint ЕФИ—1031 (81)—87.
6. Волков Д. В. Письма в ЖЭТФ, 38, 508 (1983).
7. Волков Д. В., Сорока В. А., Ткач В. И. Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, т. 1, 48, Протвино, 1984.
8. Шандер В. Н. ДАН Болгарии, 36, 309 (1983).
9. Нерсисян А. П., Худавердян О. М. Материалы VII Советской гравитационной конференции, 316, Ереван, 1988.
10. Кас V. G. Advances in Math., 26, 8 (1977).

ՏԱՐԲԵՐ ԶՈՒՅԳՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԵՐԿՈՒ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ 2-ՁԵՎԵՐՈՎ ՕԺՏՎԱԾ
ԳԵՐՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ $\tilde{UQ}(N)$ ՏԱՐՕՐԻՆԱԿ ԳԵՐՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎԸ

Ա. Պ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ, Հ. Մ. ԽՈՒԴԱՎԵՐԴՅԱՆ

Գտնված են վեկտորային զերգաշտերը, որոնք պահպանում են միաժամանակ կենտ ու
զույգ կանոնական սիմպլեկտիկ կառուցվածքները և նրանց զերհանրահաշիվը:

SUPERSPACES WITH ODD AND EVEN CANONICAL 2-FORMS AND STRANGE SUPERALGEBRA $\tilde{UQ}(N)$

A. P. NERSESSYAN, O. M. KHU DAVERDYAN

The vector superfields simultaneously conserving the even and odd canonical
simplectic structures are obtained and their superalgebras are calculated.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 24, вып. 6, 294—300 (1989)

УДК 535.14

ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В СЖАТОМ СОСТОЯНИИ

Г. Ю. КРЮЧКЯН

Институт физических исследований АН АрмССР

(Поступила в редакцию 30 декабря 1988 г.)

Исследованы квантовые эффекты корреляций интенсивности для света
в сжатом состоянии, из которых следует метод его идентификации. Вычисле-
ны корреляционная функция интенсивностей света на выходе из резонато-
ра и спектр флуктуаций разности интенсивностей двух коррелированных
мод ниже вакуумного уровня в невырожденном четырехволновом смешении.

1. Введение

Сжатый свет характеризуется вакуумными флуктуациями квадра-
турных амплитуд A_1 , A_2 поля излучения [1]. Для одномодового поля
эти амплитуды связаны с операторами a^+ , a рождения и уничтожения
следующим образом

$$A_1 = -\frac{1}{2}(a + a^+), \quad A_2 = \frac{i}{2}(a^+ - a), \quad (1)$$

причем $[A_1, A_2] = \frac{i}{2}$. В сжатом состоянии поля среднеквадратичная
дисперсия одной из компонент в форме нормально-упорядоченного
произведения операторов удовлетворяет неравенству