

EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM OF S-WAVEGUIDES REFRACTION INDEX PROFILE DETERMINATION

E. A. ARUTYUNYAN, S. KH. GALOYAN, S. P. POGOSYAN

The wave equation for optical waveguides with Fermi-type refractive index profile is analytically solved. The exact dispersion equation is derived and the refractive index profile for such a type of waveguides is calculated.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 24, вып. 5, 219—223 (1989)

УДК 535.535.24:535.6

ВАРИАЦИЯ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ В КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОМ СВЕТОВОМ ПОЛЕ

К. Е. АСАТРЯН, Н. В. ТАБИРЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

(Поступила в редакцию 2 декабря 1988 г.)

Показано, что вариация свободной энергии прозрачной среды в квазимонохроматическом световом поле зависит от дисперсных свойств среды. Сила, обусловленная дисперсией, действует только в случае, когда мгновенная частота световой волны меняется во времени.

1. В работе [1] (см., также [2], § 81) было показано, что при вариации диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon$ среды, находящейся во внешнем электрическом поле, плотность свободной энергии меняется на величину

$$\delta F = - \frac{E^2}{8\pi} \delta\epsilon, \quad (1)$$

где E — напряженность электрического поля. На примере замкнутой системы, состоящей из конденсатора и катушки индуктивности было показано, что выражение (1) справедливо также для квазимонохроматического поля $E = E_0(t) \exp(-i\omega t)$ в диспергирующей среде с замедленной F и E на усредненные по периоду высокочастотных колебаний $\tau \sim \omega^{-1}$ величины $\bar{F}$ и $\bar{E}$; $\delta\epsilon$ в этом случае соответствует изменению диэлектрической проницаемости среды на частоте ω .

В настоящей работе получено выражение для вариации свободной энергии диспергирующей среды в квазимонохроматическом световом поле. Показано, что $\delta\bar{F}$ может зависеть от дисперсных свойств среды $d\epsilon(\omega)/d\omega$ при временной вариации мгновенной частоты квазимонохроматической волны.

2. Известное выражение для средней плотности энергии квазимонохроматической электромагнитной волны в прозрачной, изотропной и диспергирующей среде в оптическом диапазоне частот [2]

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\left(\epsilon + \omega \frac{d\epsilon}{d\omega} \right) |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 \right], \quad (2a)$$

где E — комплексная амплитуда напряженности электрического поля волны, связанная с вещественным вектором напряженности соотношением $E_v = 0,5(E + E^*)$, H — комплексная амплитуда напряженности магнитного поля волны, ε — диэлектрическая проницаемость среды на “несущей”, частоте ω . $\bar{U}$ получено не только в пренебрежении слагаемыми, пропорциональными высшим производным ε по ω , но также слагаемого, пропорционального $d\varepsilon/d\omega$ и имеющего вид

$$\bar{U}' = \frac{i}{16\pi} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \left(E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} - E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right). \quad (26)$$

Это слагаемое получается с помощью процедуры, аналогичной приведенной в [2], § 80 при последовательном учете всех величин, пропорциональных $d\varepsilon/d\omega$. Разумеется $\bar{U}'$ меньше соответствующего слагаемого в (2а) в $\Delta\omega/\omega$ раз, где $\Delta\omega$ — ширина частотного спектра волны, однако, как будет показано ниже, именно слагаемые такого порядка определяют зависимость вариации свободной энергии прозрачной среды в квазимонохроматическом световом поле от дисперсных свойств среды.

3. С помощью уравнения Максвелла

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$$

выразим H через E . Представив E и H , как суперпозицию плоских монохроматических волн,

$$E = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \exp[-i(\omega + \alpha)t + i k_{\alpha} r], \quad (3)$$

$$H = \sum_{\alpha} H_{\alpha} \exp[-i(\omega + \alpha)t + i k_{\alpha} r]$$

($k_{\alpha} = k(\omega + \alpha)$ — волновой вектор компоненты с частотой $\omega + \alpha$) для каждой компоненты будем иметь

$$[k_{\alpha} E_{\alpha}] = \frac{\omega + \alpha}{c} H_{\alpha}.$$

Отсюда, с точностью до слагаемых $\sim \alpha/\omega$ (условие квазимонохроматичности означает, что $\alpha/\omega \ll 1$), получим

$$H_{\alpha} = \frac{c}{\omega} \left\{ [k E_{\alpha}] - \frac{\alpha}{\omega} \left([k E_{\alpha}] + \omega \left[\frac{dk}{d\omega} E_{\alpha} \right] \right) \right\}, \quad (4)$$

где

$$k = k(\omega).$$

Из (3) и (4) следует

$$H = \frac{c}{\omega} \left\{ [k E_0] - \frac{i}{\omega} \left[k \frac{\partial E_0}{\partial t} \right] + i \left[\frac{dk}{d\omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} \right] \right\} \exp(-i\omega t + i k r), \quad (5)$$

где E_0 — медленно зависящая от пространственно-временных координат амплитуда волны: $E = E_0(r, t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$,

$$E_0(r, t) = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \exp[-i\alpha t + i\alpha(d\mathbf{k}/d\omega)\mathbf{r}]. \quad (6)$$

Выражение (5) упрощается, если ввести вектор рефракции $\mathbf{n} = \mathbf{k}c/\omega$

$$\mathbf{H} = \left([\mathbf{n} \mathbf{E}_0] + i \left[\frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right] \right) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (7)$$

С учетом (7) выражение для энергии электромагнитного поля окончательно примет вид

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{d(\varepsilon\omega^2)}{d\omega} |\mathbf{E}|^2 + \frac{3i}{2} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \left(\mathbf{E}_0^* \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} - \mathbf{E}_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) \right\}, \quad (8)$$

При записи (8) мы пренебрегли слагаемыми

$$-\frac{1}{16\pi} (\mathbf{n} \mathbf{E}_0) (\mathbf{n} \mathbf{E}_0^*), \quad (9)$$

$$\frac{i}{16\pi} \left[\left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \mathbf{E}_0 \right) - \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \mathbf{E}_0^* \right) \right].$$

Эти слагаемые связаны с немонохроматичностью пространственного спектра волны, т. е. с тем обстоятельством, что $k_{\alpha} = k(\omega + \alpha)$, и вообще говоря, могут иметь разные направления для разных α .

В рассматриваемом нами приближении квазимонохроматической волны, $\alpha/\omega \ll 1$, из условия поперечности для каждой монохроматической компоненты $(\mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha}) = 0$, следует

$$(\mathbf{n} \mathbf{E}_{\alpha}) \approx -\alpha \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \mathbf{E}_{\alpha} \right)$$

и, поэтому,

$$(\mathbf{n} \mathbf{E}_0) \approx -i \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Используя (10) можно также получить, что

$$\left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) \approx -i \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial t^2} \right). \quad (11)$$

Таким образом, оба слагаемых в (9) оказываются для квазимонохроматических волн малыми по сравнению со слагаемыми, выписанными в (8).

Далее, как и в работе [1], будем использовать условие адиабатической инвариантности:

$$\delta \bar{U} = \bar{U} \frac{\delta \omega}{\omega}. \quad (12)$$

Изменение частоты при изменении диэлектрической проницаемости среды в работе [1] получено с помощью рассмотрения замкнутой резо-

нансной системы, состоящей из емкости и самоиндукции. Мы же, имея в виду световое поле, рассмотрим оптический резонатор, следуя работе [3].

Как известно для волны в резонаторе выполняется условие $(\omega/c)\sqrt{\varepsilon(\omega)} = \pi m/L$, $m = 1, 2, \dots$ (L — длина резонатора). Поэтому

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = - \frac{\delta \varepsilon}{2\varepsilon} \quad (13)$$

и, учитывая, что в изменение $\delta \varepsilon$ дает вклад также изменение частоты:

$$\delta \varepsilon = \delta \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \delta \omega, \quad (14)$$

из (13) и (14) получим

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = - \delta \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\omega} \frac{d(\varepsilon \omega^2)^{-1}}{d\omega} \right). \quad (15)$$

Таким образом из (8), (12) и (15) следует

$$\delta \bar{U} = - \frac{\delta \varepsilon_0}{16\pi} \left\{ |E|^2 + \frac{3i}{2} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \left(2\varepsilon + \omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)^{-1} \left(E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} - E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right) \right\}. \quad (16)$$

Как уже отмечено в работе [1], вариация энергии (16), имеющая место при постоянной энтропии, равна вариации свободной энергии при постоянной температуре. Полученное нами выражение (16) отличается от выражения (1) слагаемым $\sim d\varepsilon/d\omega$.

Выделив в E_0 амплитуду A и фазу φ : $E_0 = A \exp(i\varphi)$, выражение (16) можно представить в виде

$$\delta \bar{U} = \delta \bar{U}_1 + \delta \bar{U}_2, \quad (17)$$

$$\delta \bar{U}_1 = - \frac{\delta \varepsilon_0}{16\pi} |E|^2, \quad \delta \bar{U}_2 = \frac{\delta \varepsilon_0}{16\pi} |E|^2 \frac{d\varepsilon}{d\omega} \left(2\varepsilon + \omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Таким образом, слагаемое $\delta \bar{U}_2$, зависящее от дисперсных свойств среды, появляется только вследствие вариации мгновенной частоты квазимонохроматической волны: $\partial \varphi / \partial t = \omega - \omega_{\text{лн}}$.

4. Интересно отметить, что усреднение $\delta \bar{U}$ по характерному времени изменения медленной амплитуды приводит к тому, что член в выражении (16), обусловленный дисперсией среды, становится пропорциональным

$$\int x |E_x|^2 dx,$$

т.е. дисперсия среды в этом случае не проявляется для световых полей с симметричным спектральным распределением.

Получение относительно больших значений $\delta \bar{U}_2$ может быть связано с возможностью достижения больших значений $\partial \varphi / \partial t$.

Для примера вычислим величину $\varphi(t)$ в простейшем случае, когда спектр волны состоит из двух линий со сдвину тыми на Ω частотами:

$$E = B_1 \exp[-i(\omega + \Omega)t + i\beta_1] + B_2 \exp[-i(\omega - \Omega)t + i\beta_2]. \quad (18)$$

С помощью простых преобразований (18) можно записать в виде

$$E = A(t) \exp[i\varphi(t) - i\omega t], \quad (19)$$

где

$$A(t) = [B_1^2 + E_2^2 + 2B_1 B_2 \cos(2\Omega t + \beta_2 - \beta_1)]^{1/2}, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{B_2 \sin(\Omega t + \beta_2) + B_1 \sin(\Omega t - \beta_1)}{B_2 \cos(\Omega t + \beta_2) + B_1 \cos(\Omega t - \beta_1)}.$$

Как следует из (20) $d\varphi/dt \sim \Omega^{-1}$ и, следовательно, $\delta U_2 \sim \Omega/\omega$.

Таким образом, в настоящей работе рассчитан вклад в вариацию свободной энергии прозрачной среды, обусловленный ее дисперсными свойствами и показано, что он проявляется только для волн с изменяющейся во времени мгновенной частотой.

Авторы выражают благодарность Б. Я. Зельдовичу и Л. П. Питаевскому за проявленный интерес к настоящей работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Питаевский Л. П. ЖЭТФ, 39, 1450—1458 (1960).
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Изд. Наука, М., 1982.
3. Зельдович Б. Я., Табиров Н. В. УФН, 147, 633 (1985).

ՔՎԱԶԻՄՈՆՈԲՐՈՄԱՏԻԿ ԼՈՒՍԱՅԻՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԴԻՍՊԵՐՍՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԱԶԱՏ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՎԱՐԻԱՑԻԱՆ

Կ. Ե. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ն. Վ. ԹԱԲԻՐՅԱՆ

Ցույց է տրված, որ քվազիմոնոքրոմատիկ լուսային դաշտում թափանցիկ միջավայրի ազատ էներգիայի վարիացիան կախված է միջավայրի դիսպերսիոն հատկություններից: Դիսպերսիայով պայմանավորված ուժը ազդում է միայն այն դեպքում, երբ լուսային ալիքի ակտիվ թափային հաճախությունը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում:

THE VARIATION OF THE FREE ENERGY OF A DISPERSIVE MEDIUM IN QUASI-MONOCROMATIC OPTICAL FIELD

K. E. ASATRYAN, N. V. TABIRYAN

The variation of free energy of a transparent medium in a quasi-monochromatic optical field is shown to be dependent on dispersive properties of the medium. The force connected with the dispersion acts only in case, when the instantaneous frequency of optical wave changes in time.