

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТЕПЕНЯМ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Н. И. КАРБУШЕВ, Э. В. РОСТОМЯН, Г. Г. ЧИГЛАДЗЕ

Институт радиофизики и электроники АН АрмССР

(Поступила в редакцию 5 октября 1988 г.)

Построена теория взаимодействия моноэнергетического электронного пучка малой плотности с холодной плазмой, основанная на разложении возмущений по степеням амплитуды поля. Рассматривается идеализированная система, в которой электроны пучка и плазмы связаны друг с другом некоторым коэффициентом, что позволяет учесть собственные колебания пучка. Полученные аналитические результаты качественно правильно отражают тенденцию развития неустойчивости при амплитуде поля плазменных колебаний порядка максимальной и вполне удовлетворительно согласуются с результатами, полученными численными методами.

1. Известно, что при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой возникают неустойчивости [1, 2], в результате развития которых нарастает амплитуда колебаний электромагнитного поля, а электроны пучка теряют часть своей кинетической энергии. Из линейной теории, верной при малых амплитудах поля, следует экспоненциальное нарастание амплитуды возмущений. На нелинейной стадии, которая наступает с ростом амплитуды, происходит захват частиц пучка полем волны и насыщение неустойчивости. Максимальное значение амплитуды поля определяется в рамках нелинейной теории. Наиболее полное нелинейное описание плазменно-пучковой неустойчивости возможно с помощью численного решения усредненных нелинейных уравнений [3, 4]. Вместе с тем, качественно правильная оценка максимальной амплитуды может быть получена и с помощью аналитических методов [5—8]. Одним из наиболее простых является метод разложения по степеням поля возмущений [9], известный под названием метода степенных рядов [10]. Этот метод хорошо работает в области малых амплитуд (слабонелинейной области) и дает качественно правильную тенденцию насыщения неустойчивости в области больших значений амплитуды поля.

В настоящей работе, на основе метода разложения по степеням амплитуды поля возмущений, исследуется нелинейное взаимодействие моноэнергетического электронного пучка малой плотности с холодной изотропной плазмой. Плазма считается линейной, а движение электронов пучка находится методом последовательных приближений, первым из которых является линейное. Таким образом, учитывается влияние высших гармоник возмущений скорости и плотности пучка на развитие неустойчивости. Оцениваются максимальная величина амплитуды поля и время ее достижения. Рассматривается модельная пространственно неограниченная система, в которой частицы плазмы и пучка связаны друг с другом некоторым

коэффициентом связи α ($0 < \alpha \leq 1$). Такое предположение позволяет учесть также поле высокочастотного пространственного заряда пучка, т. е. его собственные колебания, что весьма существенно в случае пространственно разделенных в поперечном сечении пучка и плазмы [11].

2. В одномерном случае поведение исследуемой системы описывается уравнениями [12]

$$\frac{d}{dt} V_i = \frac{e}{m} E^{(i)}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{d}{dz} (n_i v_i) = 0, \quad E^{(p,b)} = E_{p,b} + \alpha E_{b,p} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_b + 4\pi e (n_b v_b - n_{b0} u) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} E_p + 4\pi e n_p v_p = 0,$$

где индекс $i = p, b$ относится к плазме и пучку соответственно, n и v — плотность и скорость электронов, E — электрическое поле, t и z — время и координата в направлении распространения пучка, n_{b0} и u — равновесные значения плотности и скорости электронов пучка.

Будем искать решение системы (1) в виде

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots, \quad (2)$$

где X_1 представляет собой линейное приближение, $X_n \sim X_1^n$. Поступая аналогично работе [12], с точностью до третьего приближения можно представить в следующем виде полное поле плазменных колебаний с волновым вектором k на временах $t > \delta^{-1} = (\text{Im } \omega)^{-1}$ (δ — инкремент нарастания неустойчивости, ω — комплексная частота):

$$E_p(t) = E_{p10} e^{\delta t} (1 - E_{p10}^2 \text{Re } \beta_p e^{2\delta t}) \cos \varphi - \text{Im } \beta_p E_{p10}^3 e^{3\delta t} \sin \varphi, \quad (3)$$

$$\beta_p = \frac{\alpha^4 \omega_p \omega_k k^2 e^2}{32 m^2 \delta (\delta - i\omega_k)^2 + \omega_b^2} \left[8 i \omega_k' \omega_k \frac{i\omega_k - 2\delta}{4\delta^2 + \omega_b^2} - 3\omega_b^2 \frac{\delta^2 + 6i\delta\omega_k + 3\omega_k^2}{4(\delta - i\omega_k)^2 + \omega_b^2} + \right. \\ \left. + (7\delta^2 + 10i\delta\omega_k + 5\omega_k^2) \right] \{ \alpha^2 \omega_p \omega_b^2 (2\delta - i\omega_k) - \\ - i[(3\delta - i\omega_k)^2 + \omega_b^2][(\delta - i\omega_k)^2 + \omega_b^2] \}^{-1}, \quad (4)$$

$$\varphi = \bar{\omega} t - kz, \quad \bar{\omega} = \text{Re } \omega, \quad \omega_k = \bar{\omega} - ku, \quad \omega_{p,b}^2 = 4\pi n_{p,b0} e^2 / m,$$

где величина E_{p10} определяется амплитудой E_0 электрического поля плазменных колебаний при $t = 0$. В отсутствие предварительной модуляции пучка по плотности и скорости и в условиях сильной связи пучка с плазмой

$$\alpha^2 \gg 2\omega_b / \omega_p \quad (5)$$

имеем при максимальном инкременте неустойчивости $E_{p10} = E_0/3$. В противоположном (5) пределе (слабая связь) имеем $E_{p10} = E_0/2$.

Максимальные значения инкрементов определяются выражениями для комплексной частоты (12)

$$\omega = \bar{\omega} + i\delta + \begin{cases} \omega_p + 2^{-1}(-1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{\alpha^2}{2} \omega_p \omega_b^2 \right)^{1/3}, & \alpha^2 \gg 2\omega_b / \omega_p, \\ \omega_p + i(\alpha/2)(\omega_b \omega_p)^{1/2}, & \alpha^2 \ll 2\omega_b / \omega_p. \end{cases} \quad (6)$$

и достигаются при $k = \omega_p/u$ и $k = (\omega_p + \omega_b)/u$ соответственно.

3. Из формулы (3) в линейном приближении следует экспоненциальное нарастание амплитуды поля плазменных колебаний во времени. При дальнейшем развитии неустойчивости влияние нелинейных членов становится существенным, а закон изменения амплитуды поля $E_{p0}(t)$ оказывается иным. С точностью до третьего приближения амплитуду поля определяет первое слагаемое в (3), пропорциональное косинусу, а слагаемое, пропорциональное синусу определяет сдвиг фазы, его влияние на амплитуду начинает сказываться в следующем, пятом приближении. Согласно (3) зависимость амплитуды поля плазменных колебаний от времени имеет максимум, равный

$$E_{p1\max} = 2/3 \sqrt{3 \operatorname{Re} \beta_p} \quad (7)$$

и достигаемый в момент времени

$$t_{\max} = -\frac{1}{2\delta} \ln(3E_{p10}^2 \operatorname{Re} \beta_p). \quad (8)$$

При этом максимальная доля кинетической энергии пучка, переходящая в энергию плазменных колебаний равна

$$\eta_{\max} = E_{p0\max}^2 / 4\pi n_{b0} m u^2 = (27 \pi m u^2 n_{b0} \operatorname{Re} \beta_p)^{-1}. \quad (9)$$

Последний член в первых квадратных скобках в (4) обусловлен второй гармоникой нелинейного движения электронов пучка в поле плазменных колебаний с волновым вектором k , а второе и первое слагаемые учитывают вклад второй и нулевой гармоник поля пучка соответственно. Вторая гармоника поля пучка с волновым вектором $2k$ возникает вследствие его нелинейной модуляции в процессе развития неустойчивости. Однородное же в пространстве электрическое поле (нулевая гармоника) носит индукционный характер и возникает в ответ на изменение средней по координате плотности тока пучка. Это индукционное поле полностью аналогично исследованному в работах [12—14].

В приближении сильной связи пучка с плазмой (5) учет в (4) слагаемых, обусловленных второй и нулевой гармоникой поля пучка, оказывается несущественным, поскольку $\delta \sim \omega_k \gg \omega_b$, а сама величина β_p в случае максимального инкремента равна

$$\beta_p = \frac{13}{576 \pi n_{b0} m u^2} \left(\frac{\alpha^2 n_b}{2 n_p} \right)^{-1/3} \left(1 - i \frac{5 \sqrt{3}}{13} \right). \quad (10)$$

При этом в соответствии с формулой (9) имеем $\eta_{\max} \sim (\alpha^2 n_b / 2 n_p)^{1/3}$. В противоположном (5) пределе влияние гармоник поля пучка становится весьма существенным т.к. $\delta \ll \omega_b \sim \omega_k$, а величина β_p для максимального инкремента равна

$$\beta_p = (64 \pi n_{b0} m u^2)^{-1} \sqrt{n_p / n_b}. \quad (11)$$

При этом $\eta_{\max} \sim \sqrt{n_p / n_b}$. Здесь же отметим, что пренебрежение вкладом нулевой гармоникой поля пучка в (4) дает вместо (11) величину

$$\beta_p = \frac{\sqrt{n_p / n_b}}{64 \pi n_{b0} m u^2} \left[1 - i \frac{2}{\alpha} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/4} \right], \quad (12)$$

причем $\text{Im} \beta_p \gg \text{Re} \beta_p$. Если, кроме того, пренебречь еще и вкладом второй гармоники поля пучка, то получаем чисто мнимую величину

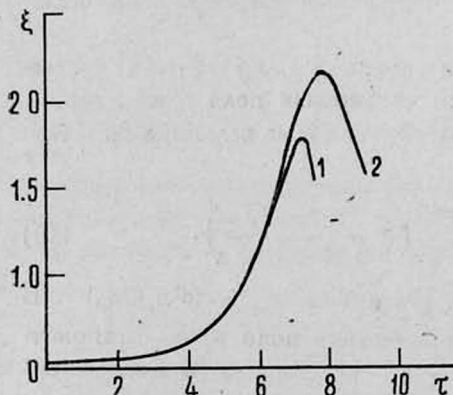
$$\beta_p = - (5i/256\pi n_{b0} m u^2 \tau) (n_p/\gamma_0)^{1/4} \quad (13)$$

и, при этом, амплитуда поля плазменных колебаний не имеет максимума с точностью до третьего порядка.

4. Формула (3) получена в предположении, когда на временах $t > \delta^{-1}$ еще имеется некоторый интервал времени, в котором остается справедливым линейное приближение. Это возможно при $E_0 \ll E_{p0 \text{ max}}$ и только в этом случае в некотором интервале времени возмущения нарастают экспоненциально. В противном случае необходимо решать строгую начальную задачу.

Использованный при решении системы уравнений (1) метод последовательных приближений предполагает выполнение условий типа $|X_n| \ll |X_1|$, $n > 1$. Отсюда следует, что полученное решение может быть справедливым лишь в условиях $E_{p0}(t) \ll E_{p0 \text{ max}}$, когда амплитуда поля плазменных колебаний мала по сравнению с максимальной. Поэтому соотношения (7)–(9) следует воспринимать как оценочные, хотя формула (3) является вполне работоспособной в области амплитуд поля плазменных колебаний, малых по сравнению с максимальной, т. е. в слабонелинейном приближении, и правильно характеризует тенденцию к насыщению развития неустойчивости. Отметим, что гидродинамические уравнения движения (1) справедливы также лишь при $E_{p0}(t) \ll E_{p0 \text{ max}}$. При достижении максимума амплитуды поля плазменных колебаний происходит захват электронов пучка и их движение становится многопоточковым [4].

Представляет интерес сравнение формулы (3) с результатами численного решения усредненных нелинейных уравнений в условиях сильной связи (5) [3, 4]. Кривые зависимостей $E_{p0}(t)$, полученные численными методами и из аналитической формулы (3) весьма близки друг к другу



Зависимость амплитуды поля плазменной волны от времени: 1 — кривая, полученная из приближенной формулы (3); 2 — результат численного расчета нелинейных уравнений [3, 4].

Безразмерные величины:

$$\xi = \frac{e E_{p0}}{\sqrt{2} m \omega_p u} \left(\frac{2 n_{p0}}{n_{b0}} \right)^{2/3};$$

$$\tau = \omega_p t \left(\frac{n_{b0}}{2 n_{p0}} \right)^{1/3}.$$

практически во всем интервале времени $0 < t < t_{\text{max}}$. Численное максимальное значение амплитуды поля плазменных колебаний превосходит максимум (7) в 1,3 раза, а соответствующий достижению этого максимума момент времени, полученный при численном счете, превышает значение (8) в 1,1 раза (см. рис.). Максимальные доли кинетической энергии, передаваемой электронами пучка, отличаются в 1,7 раза. Таким образом, можно

сделать вывод, что фактически формулой (3) с неплохой точностью допустимо пользоваться практически во всем интервале времен $0 < t < t_{\max}$, т. е. вплоть до достижения максимума амплитуды поля плазменных колебаний.

При получении формулы (3) мы ограничились третьим приближением. Процесс получения следующих приближений может быть продолжен для уточнения решения. Более того, нельзя ограничиваться третьим приближением при нахождении максимума амплитуды поля плазменных колебаний в условиях слабой связи, противоположных (5), если по какой-либо причине нулевая гармоника не проявляется во взаимодействии. В таком случае область применимости формулы (3) ограничивается неравенством

$$E_p(t) \ll E_{p0\max} \sqrt{\frac{\omega_p}{2\omega_b}} \ll E_{p0\max}, \quad (14)$$

где $E_{p0\max}$ определено в (7) при значении β_p из (12). При этом насыщение развития плазменно-пучковой неустойчивости может быть получено только в следующем, пятом приближении. Однако нахождение более высоких степеней связано с громоздкими расчетами.

Наряду с предложенным возможно использование метода последовательных приближений при решении системы уравнений (1) и в другом виде. Например, близкие результаты дает подход, в котором решение вместо суммы (2) представляется следующим образом:

$$X = \operatorname{Re} \left\{ X_0 \exp \left[-i\omega t + ikz + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}, \quad (15)$$

где

$$\varphi_n(t) \sim X_{2n} \sim X_0^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер А. И., Файберг Я. Б. ДАН СССР, 69, 555 (1949).
2. Bohn D., Gross E. Phys. Rev., 75, 1851 (1949).
3. Онищенко и др. Письма в ЖЭТФ, 12, 407 (1970).
4. Matsiborko N. G. et. al. Plasma Phys., 14, 591 (1972).
5. Ковтун Р. И., Рухадзе А. А. ЖЭТФ, 58, 1709 (1970).
6. Долженко и др. Физика плазмы, 1, 293 (1975).
7. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Физика плазмы, с. 792 (1980).
8. Гришин В. К., Шапошникова Е. Н. ЖТФ, 52, 1106 (1982).
9. Шапиро В. Д. ЖЭТФ, 44, 613 (1963).
10. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, Изд. Сов. радио, М., 1970.
11. Игнатов А. М., Карбушев Н. И., Рухадзе А. А. Краткие сообщ. по физике, 1982, № 5, с. 21.
12. Карбушев Н. И., Ростомян Э. В., Чигладзе Г. Г. Изв. АН АрмССР, Физика, 23, 338 (1988).
13. Владыко В. Б., Рудяк Ю. В., Рухлин В. Г. ЖТФ, 55, 1863 (1985).
14. Веденин П. В., Карбушев Н. И., Рухлин В. Г. Письма в ЖТФ, 11, 220 (1985).

ՊԼԱԶՄԱՅԻ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՓՆՋԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՈՋ ԳՄԱՅԻՆ
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԴԱՇՏԻ ԱՍՊՈՒՑՈՒԴԱՅԻ ՇԱՐՔԻ
ՎԵՐԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Ն. Ի. ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ, Է. Վ. ՌՈՍՏՈՄՅԱՆ, Գ. Գ. ՉԻԳԼԱԶԵ

Կառուցված է նոր մոնոէներգետիկ էլեկտրոնային փնջի և սառը պլազմայի փոխազդեցությանը ու գծային անալիտիկ խոտորմաների տեսություն՝ դաշտի ամպլիտուդայի շարքի վեր-

լուման եղանակով: Դիտարկված է իդեալիզացված համակարգ, որում պլազմայի և փնջի էլեկտրոնները կապված են որոշակի դորժակցով: Այդպիսի դիտարկումը հնարավորություն է տալիս հաշվի առնել փնջի սեփական տատանումները: Ստացված անալիտիկ արդյունքները որակապես ճիշտ են նկարագրում անկայունության զարգացման ընթացքը, երբ դաշտի ամպլիտուդան մեծագույն ամպլիտուդայի կարգի է, և լավ համընկնում են իվային մեթոդներով ստացված արդյունքներին հետ:

ON THE POWER EXPANSION IN FIELD AMPLITUDES IN NONLINEAR BEAM-PLASMA INTERACTION THEORY

N. I. KARBUSHEV, E. V. ROSTOMYAN, G. G. CHIGLADZE

Based on the power expansion of perturbations in field amplitudes, a theory of interaction of monoenergetic low-density electron beam with cold plasma is constructed. In the idealized system under consideration the beam and plasma electrons are coupled by a coefficient that allows one to take into account the proper oscillations of the beam. The obtained analytical results properly describe the beam-plasma instability development and well agree with results of numerical calculations.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 24, вып. 2, 72—78 (1989)

УДК 548.0:532.783

ВЛИЯНИЕ СТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА СТРУКТУРУ ЛИОТРОПНОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

А. А. ШАГИНЯН, Г. Г. БАДАЛЯН, М. Х. МИНАСЯНЦ

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 15 февраля 1988 г.)

Рентгенографическим методом исследовано влияние статических электрических полей на структуру ламеллярной фазы лиотропного жидкого кристалла трех типов: с электронеитральными доменами; с доменами, обладающими остаточным дипольным моментом; с заряженными доменами. Установлено, что под влиянием поля в первом случае меняется только упаковка молекул внутри домена, во втором случае имеет место пространственная переориентация доменов, а в третьем случае происходит накопление и ориентация заряженных доменов на соответствующем электроде.

Влияние электрических полей на структуру термотропных жидких кристаллов интенсивно исследуется [1—3], чего нельзя сказать о лиотропных жидких кристаллах (ЛЖК). Имеющиеся малочисленные данные [4, 5] относятся главным образом к переменным полям и не дают непосредственной информации о структуре ЛЖК.

Отсутствие данных по влиянию статических электрических полей на ЛЖК, главным образом, обусловлено гидрадинамическими эффектами, возникающими при этом в жидком кристалле. По этой причине, во избежание возникновения гидродинамических эффектов, в настоящей работе исследовано влияние слабых электрических полей на структуру ЛЖК.