

УДК 535.14;530.182

НОВЫЕ КЛАССЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. М. ИШХАНИЯН

Институт физических исследований АН АрмССР

(Поступила в редакцию 10 июня 1987 г.)

Найдены новые классы аналитических решений уравнения Шредингера для двухуровневого атома, взаимодействующего с немонохроматическим электромагнитным полем, выражающихся в замкнутой форме через гипергеометрические функции. Соответствующие импульсные функции имеют ступенчатую или колоколообразную форму. Используемый метод поиска интегрируемых случаев уравнений двухуровневого атома применим и в случае других стандартных уравнений.

1. Введение

Во многих задачах квантовой оптики, магнитного резонанса и теории атомных столкновений поведение атома во внешнем квазирезонансном электромагнитном поле с хорошей точностью описывается двухуровневым приближением. В этом случае зависящее от времени уравнение Шредингера можно записать в виде

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da_1}{dt} &= U(t) e^{-i\Delta t} a_2, \\ i\hbar \frac{da_2}{dt} &= U(t) e^{i\Delta t} a_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где a_1, a_2 — амплитуды вероятностей населенностей уровней, $U(t)$ пропорционально амплитуде классического внешнего поля, Δ — расстройка частоты поля от атомной.

Первое известное решение (1) при $\Delta \neq 0$, $U \neq \text{const}$ найдено в работе [1] для импульса

$$U = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \frac{t}{2}. \quad (2)$$

В работе [2] получено решение (1) в гипергеометрических функциях для двухпараметрического семейства огибающих:

$$U = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{1-z+\mu} \frac{dz}{dt}, \quad e^t = \frac{z^\mu}{(1-z)^{\lambda+\mu}} \quad (3)$$

(λ, μ — действительные параметры), содержащее импульс (2) при $\mu = 1/2$, $\lambda = 0$. Еще один двухпараметрический класс функций $U(t)$, допускаю-

ший интегрирование преобразованной системы (1), найден в работе [3]. Другой интегрируемый случай указан в [4, 5]:

$$U(t) = \lambda(1 + \operatorname{th} \mu t). \quad (4)$$

В настоящей работе рассматриваются преобразования, сводящие (1) к стандартным уравнениям второго порядка. Используя в качестве стандартного гипергеометрическое уравнение, мы получим девять новых семейств U , допускающих интегрирование (1).

2. Преобразование исходной системы уравнений

Исключим a_2 из (1):

$$a_{111} + \left(i\Delta - \frac{U_t}{U}\right)a_{11} + \frac{U^2}{h^2}a_1 = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

Потребуем, чтобы преобразование зависимой и независимой переменных, заданное формулами

$$\frac{dz}{dt} = \rho(z), \quad a_1 = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \quad (6)$$

приводило (5) к некоторому стандартному уравнению

$$u_{zz} + f(z)u_z + g(z)u = 0, \quad (7)$$

в качестве которого можно взять какое-либо хорошо изученное уравнение, например гипергеометрическое.

Подстановка (6) в (7) дает

$$a_{111} + \rho \left(f - \frac{\rho_z}{\rho} + 2 \frac{\varphi_z}{\varphi} \right) a_{11} + \rho^2 M a_1 = 0, \quad (8)$$

где введено обозначение

$$M = \frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + f \frac{\varphi_z}{\varphi} + g. \quad (9)$$

Приравнявая коэффициенты (5) и (8) и исключая ρ , получим

$$e^{2i\Delta t} = c_1 M^{-1} \exp \left(2 \int f dz \right), \quad (10)$$

$$U = h \sqrt{M} \frac{dz}{dt}, \quad (11)$$

где c_1 — комплексная постоянная. В дальнейшем мы всюду полагаем $h = 1$ (кроме таблиц).

При выбранном виде (7) стандартного уравнения и исходном φ уравнение (10) задает замену переменной, а (11) определяет вид $U(t)$. Таким образом, задача сводится к решению одного уравнения (10) относительно $\varphi(z)$, но при условии, что $U(t)$, определяемое (11), действительно.

В настоящей работе исследуются решения (10) только для гипергеометрического уравнения

$$u_{zz} + \frac{Az+B}{z(1-z)} u_z + \frac{D}{z(1-z)} u = 0. \quad (12)$$

В этом случае (10) имеет вид

$$e^{2i\lambda t} = c_1 \left[\frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + \frac{Az+B}{z(1-z)} \frac{\varphi_z}{\varphi} + \frac{D}{z(1-z)} \right] \varphi^1 z^{2B} (1-z)^{-2(A+B)}. \quad (13)$$

Все известные нам решения этого уравнения можно представить в виде $\varphi = Q_m \exp Q_n$, где Q_m , Q_n — полиномы от z . Заметим, однако, что такой выбор φ в принципе не обязателен.

Рассмотрим теперь конкретные решения уравнений (11) и (13).

3. Огибающие

Пусть

$$\varphi = (z + p_1)^{r_1} \cdots (z + p_m)^{r_m} \exp \left(\frac{i\Delta}{2} (q_1 z + \cdots + q_n z^n) \right), \quad (14)$$

где p_j и q_r — действительные, r_j — комплексные параметры ($j=1, \dots, m$; $r=1, \dots, n$). Если k — число параметров p_j , отличных от 0 и -1 , то можно показать, что (13) может быть разрешено только при $n + k \leq 2$.

Рассмотрим простейший случай: $k=0$, $n=0$, $\varphi = z^s (1-z)^{-s}$. Подставим φ в (13) и (9):

$$e^{2i\lambda t} = c_1 M \frac{z^{4s+2B}}{(1-z)^{4s+2(A+B)}}, \quad M = \frac{a_0 z^2 + b_0 z + c_0}{z^2 (1-z)^2}, \quad (15)$$

где a_0 , b_0 , c_0 выражаются через s и A , B , D .

Для того чтобы правая часть первого уравнения (15) представляла собой действительную рациональную функцию степени t , необходимо, чтобы множителями трехчлена $Q_3 = a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ были только z и/или $1-z$. Это возможно в шести случаях (β — действительное число):

$$\begin{aligned} 1) Q_3 = \beta^2, \quad 3) Q_3 = \beta^2 z^2, \quad 5) Q_3 = \beta^2 (1-z), \\ 2) Q_3 = \beta^2 z, \quad 4) Q_3 = \beta^2 z(1-z), \quad 6) Q_3 = \beta^2 (1-z)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим первый случай: $Q_3 = \beta^2$. Из (15) имеем

$$e^{2i\lambda t} = c_1 \beta^2 \frac{z^{4s+2B-2}}{(1-z)^{4s+2(A+B)+2}}, \quad (17)$$

$$a_0 = b_0 = 0, \quad c_0 = \beta^2. \quad (18)$$

Теперь остается лишь выбрать параметры таким образом, чтобы определяемая из (17) связь $t=t(z)$ была действительной:

$$4s + 2B - 2 = 2i\Delta\mu, \quad (19)$$

$$4s + 2(A+B) + 2 = 2i\Delta(\lambda + \mu), \quad c_1 \beta^2 = 1,$$

Таблица 1

Огибающие и параметры задачи при $n = 0$, $k = 0$. Семейства импульсов двухпараметрические: λ , μ произвольны. 1, 2, 3 — ступенчатые импульсы
4 — колоколообразный импульс (случай Бамбини—Бермана [2]).

№	$U(z)/\beta$	x	s	A, B	D	Примечание
1	$\frac{1}{\lambda z + \mu}$	x_1	s_1	$A = 2(x - s - 1) + i\Delta\lambda$ $B = 1 + i\Delta\mu - 2x$	$(s - x)(x + i\Delta\lambda - 1 - s)$	$\begin{cases} e^t = \frac{z^\mu}{(1-z)^{\lambda+\mu}} \\ \varphi(z) = \frac{z^x}{(1-z)^s} \\ x_1 : x^2 - i\Delta\mu x + \frac{\beta^2}{\hbar^2} = 0 \\ s_1 : s^2 - i\Delta(\lambda + \mu)s + \frac{\beta^2}{\hbar^2} = 0 \end{cases}$
2	$\frac{\sqrt{z}}{\lambda z + \mu}$	0	s_1	$A = -\frac{3}{2} + i\Delta\lambda - 2s$ $B = \frac{1}{2} + i\Delta\mu$	$\frac{\beta^2}{\hbar^2} - sB$	
3	$\frac{z}{\lambda z + \mu}$	0	s_1	$A = -1 + i\Delta\lambda - 2s$ $B = i\Delta\mu$	$-sB$	
4	$\frac{\sqrt{z(1-z)}}{\lambda z + \mu}$	0	0	$A = -1 + i\Delta\lambda$ $B = \frac{1}{2} + i\Delta\mu$	$\frac{\beta^2}{\hbar^2}$	

где μ и λ — произвольные действительные параметры. Тогда искомая замена переменной и огибающая U будут иметь вид

$$e^t = \frac{z^\mu}{(1-z)^{\lambda+\mu}}, \quad U_1(z) = \frac{\beta}{\lambda z + \mu}. \quad (20)$$

Решив систему (18), (19), получим все параметры задачи (см. табл. 1) для (20).

Остальные виды Q_3 из (16) дают еще три независимых интегрируемых случая, поскольку пятый и шестой случаи получаются соответственно из второго и третьего с помощью замен z на $1-z$ и A, B, D на $A, -(A+B), D$ (параметры λ, μ, β при этом заменяются соответственно на $\lambda, -(\lambda+\mu), -\beta$). Это — следствие симметрии гипергеометрического уравнения (12) относительно такой замены. В дальнейшем эти случаи мы не будем рассматривать. Заметим, что в четвертом случае, когда $\kappa = s = 0$, получается решение [2] для импульса (3).

Параметры задачи для первых четырех случаев (16) вместе с огибающими и заменой переменной приведены в табл. 1. Другие интегрируемые случаи получаются аналогичным образом, если выбрать в (14) другие допустимые k и n ($k+n \leq 2$). Результаты расчетов приведены в табл. 2, 3.

4. Обсуждение результатов

Таким образом, замена (6) при φ вида (14) приводит к одиннадцати новым случаям, допускающим интегрирование уравнения (5) (или системы (1)). Среди них имеются 6 двухпараметрических и 3 однопараметрических семейства, а также два отдельных импульса.

Решение уравнения (5) задается формулой

$$a_1 = \varphi^{-1} [A_1 F(a, b, c, z) + B_1 z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z)], \\ a+b+c = -A, \quad c=E, \quad ab=-D,$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция, $A_1, B_1 = \text{const.}$

Три первых семейства табл. 1 представляют собой ступенчатые импульсы, а четвертое семейство — колоколообразный импульс. В общем случае это — семейства асимметричных огибающих. Импульсы первого семейства начинаются с $\beta_0 = \beta/\mu$ и растут при $t \rightarrow +\infty$ до $\beta_1 = \beta/(\lambda+\mu)$ при $\lambda > 0, \lambda+\mu > 0, \beta > 0$. Импульсы второго и третьего семейств при положительных λ, μ, β начинаются с $\beta_0 = 0$ и растут до β_1 , а при отрицательных — наоборот. При $\lambda = 0$ третье семейство дает импульс (4) (см. [4.5]).

Все семейства табл. 2, а также первые три семейства табл. 3 при подходящем выборе свободных параметров определяют колоколообразные функции. Необходимые ограничения, накладываемые на параметры, легко усматриваются из физического требования о том, что функция $U(t)$ должна быть положительной, ограниченной и непрерывной. Два последних импульса табл. 3 определены лишь на некотором полубесконечном интервале времени.

Описанный в настоящей работе метод поиска интегрируемых случаев уравнения Шредингера для двухуровневого атома основывается на реше-

1, 2 — сгибающие и параметры задачи при $n = 1, k = 1$ (однопараметрические семейства), 3 — при $n = 1, k = 0$ (однопараметрическое семейство).

№	$U(z)/\beta$	A, B, D	λ, μ, s	Примечание
1	$\sqrt{\frac{z}{1-z}} \frac{z}{z+p} \frac{dz}{dt}$	$A = 1 + i\Delta\lambda$ $B = i\Delta\mu - \frac{3}{2}$ $D = -B \left(\frac{1 + i\Delta s}{2p} + \frac{i\Delta\nu}{2} \right)$	$\lambda = s + \nu \left(p - \frac{1}{2} \right)$ $\mu = p \left[\left(2 + \frac{3}{2p} \right) s + \nu \left(2p + \frac{1}{2} \right) \right]$ $1 + \Delta^2 s^2 = \frac{4p^3}{1+p} \frac{\beta^2}{h^2}$	$\left\{ \begin{aligned} e^t &= \frac{z^\mu (z+p)^s e^{\nu z}}{(1-z)^{\lambda+\mu}} \\ \varphi &= e^{\frac{i\Delta\nu}{2}} (z+p)^{\frac{1+i\Delta s}{2}} \\ \frac{\Delta^2 \nu^2}{4} &= \frac{\beta^2}{h^2} \end{aligned} \right.$
2	$\sqrt{\frac{z(1-z)}{z+p}} \frac{dz}{dt}$	$A = 1 + i\Delta\lambda$ $B = i\Delta\mu - \frac{1}{2}$ $D = -B \left(\frac{1 + i\Delta s}{2p} + \frac{i\Delta\nu}{2} \right)$	$\lambda = s + \nu \left(p + \frac{1}{2} \right)$ $\mu = p \left[\left(2 + \frac{1}{2p} \right) s + \nu \left(2p + \frac{3}{2} \right) \right]$ $1 + \Delta^2 s^2 = 4p(1+p) \frac{\beta^2}{h^2}$	
3	$\sqrt{\frac{z}{1-z}} \frac{dz}{dt}$	$A = i\Delta\lambda$ $B = -\frac{1}{2} + i\Delta\mu$ $D = i\Delta\lambda B$	$\Delta^2 \lambda^2 = \frac{\beta^2}{h^2}$	$\left\{ \begin{aligned} e^t &= \frac{z^\mu e^{-2\lambda z}}{(1-z)^{\lambda+\mu}} \\ \varphi &= e^{-i\Delta\lambda z} \end{aligned} \right.$

1, 2, 3 — огибающие и параметры задачи при $n = 0$, $k = 1$ (двухпараметрические семейства), 4, 5 — при $n = 2$, $k = 0$ (отдельные импульсы).

№	$(z^{\beta} U)$	ν, λ	A, B, D	p	Примечание
1	$\frac{1}{z+p} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \frac{dz}{dt}$	$\nu = 2(\lambda p - \mu)$	$A = i\Delta\lambda$ $B = B_1 = \frac{1}{2} + i\Delta\mu$ $D = D_1 = \frac{1}{p^2} \frac{\beta^2}{h^2} - \frac{B(1+i\Delta\nu)}{2p}$	$1 + \Delta^2 \nu^2 = \frac{4(p+1)\beta^2}{ph^2}$	$\begin{cases} e^t = \frac{z^{\mu} \cdot (z+p)^{\nu}}{(1-z)^{\lambda+\mu}} \\ \varphi = (z+p)^{\frac{1+i\Delta\nu}{2}} \end{cases}$
2	$\frac{1}{z+p} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dz}{dt}$	$\nu = \frac{2(\lambda p - \mu)}{p+1}$	$A = i\Delta\lambda - \frac{1}{2}$ $B = B_1, D = D_1$	$1 + \Delta^2 \nu^2 = \frac{4\beta^2}{ph^2}$	
3	$\frac{1}{z+p} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{dz}{dt}$	$\nu = \frac{2(\lambda p - \mu)}{2p+1}$	$A = i\Delta\lambda - 1$ $B = B_1, D = D_1$	$1 + \Delta^2 \nu^2 = \frac{4\beta^2}{p(p+1)h^2}$	
4	$z \sqrt{\frac{z}{1-z}} \frac{dz}{dt}$	$64\Delta^2 \lambda^2 = \frac{\beta^2}{h^2}$	$A = 1 - 6i\Delta\lambda$ $B = -\frac{3}{2} + i\Delta\lambda$ $D = -4i\Delta\lambda B$	—	$\begin{aligned} e^{t/\lambda} &= z(1-z)^5 e^{8(z+z^2)} \\ \varphi &= e^{4i\Delta\lambda(z+z^2)} \end{aligned}$
5	$\sqrt{z(1-z)} \frac{dz}{dt}$	$64\Delta^2 \lambda^2 = \frac{\beta^2}{h^2}$	$A = 1 + 2i\Delta\lambda$ $B = -\frac{1}{2} - i\Delta\lambda$ $D = 4i\Delta\lambda B$	—	$\begin{aligned} e^{t/\lambda} &= \frac{e^{8(-z+z^2)}}{z \cdot (1-z)} \\ \varphi &= e^{4i\Delta\lambda(-z+z^2)} \end{aligned}$

нии системы уравнений (10), (11) для некоторого заданного стандартного уравнения (7). Как мы убедились, этот подход описывает с единых позиций все известные интегрируемые случаи. Получение новых интегрируемых случаев технически сводится к перебору стандартных уравнений с известными решениями. При этом выбор функции Φ допускает некоторый произвол, порождающий интегрируемые классы. К сожалению, вопрос о множестве допустимых Φ остается открытым.

Автор выражает благодарность М. Л. Тер-Микаеляну, Р. А. Багияну и участникам теоретического семинара ИФИ АН АрмССР за полезное обсуждение, а также Д. Ю. Меликджанову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen N., Zener C. Phys. Rev., 40, 502 (1932).
2. Bambini A., Berman P. R. Phys. Rev., A23, 2496 (1981).
3. Carroll C. E., Hioe F. T. J. Phys., 19, 3759 (1986).
4. Меликян А. О. Кандидатская диссертация, Ереван, 1970.
5. Гореславский С. П., Яковлев В. П. Изв. АН СССР, сер. физическая, 37, 2211 (1973).

ԵՐԿՄԱԿԱՐԳԱԿ ԽՆԴՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՆՈՐ ԴԱՍԵՐ

Ա. Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Գտնված են ոչ մոնոքրոմատիկ էլեկտրամագնիսական դաշտի հետ փոխազդող երկմատակարգակ ատոմի համար Շրեդինգերի հավասարման հիպերերկրաչափական ֆունկցիաներով արտահայտվող անալիտիկ լուծումների նոր դասեր: Համապատասխան իմպուլսային ֆունկցիաները զանգակաձև են կամ ունեն աստիճանի տեսք: Երկմակարդակ ատոմի հավասարումների ինտեգրվող դեպքերի որոնման օգտագործված մեթոդը կիրառելի է նաև այլ ստանդարտ հավասարումների դեպքում:

NEW CLASSES OF ANALYTIC SOLUTIONS OF THE TWO-STATE PROBLEM

A. M. ISHKHANYAN

For the Schrodinger equation of two-state atom interacting with nonmonochromatic electromagnetic field, new classes of analytic solutions expressed in terms of hypergeometric functions are found. The corresponding impulse functions vary as a step or bell-shaped dependence. The method proposed for the search of new solvable cases of the two-state problem is also applicable to other standard equations.