точек, а $\ddot{U}$ в окрестности Δ_n стремится к нулю, увеличивая второй член в (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбфрид Г., Людвиг В.* Теория ангармонических эффектов в кристаллах. Изд. ИЛ, М., 1963.
2. *Борн М., Хуан-Кунь.* Динамическая теория кристаллических решеток. Изд. ИЛ, М., 1958.

ՔՎԱԶԻՀԱՐՄՈՆԻԿ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄԸ

Ա. Հ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ, Ս. Մ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Աշխատանքում, միաչափ մոդելի համար, տրվում է քվազիհարմոնիկ մոտավորության դինամիկական հիմնավորումը։ Ցույց է տրված, որ բոլոր հնարավոր ազատության աստիճաններից կարելի է առանձնացնել մեկը՝ ադիաբատիկ դինամիկական փոփոխական, որը հանդիսանում է մասնիկների միջև միջին հեռավորությանը քվազիհարմոնիկ մոտավորության դեպքում։ Բացի դրանից բերվում է քվազիհարմոնիկ մոտավորության կիրառելիության սահմանները։

DYNAMICAL BASIS OE QUASI-HARMONIC APPROXIMATION

A. O. MELIKYAN, S. M. SAAKYAN

The dynamical basis of quasi-harmonic approximation for one-dimensional model is given. It is shown that of all the degrees of freedom one can select the single one — adiabatic dynamical variable, — which is the analogue of mean distance between the particles in quasi-harmonic approximation. The regions of applicability of thi approximation are specified.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 23, вып. 3, 130—136 (1988)

УДК 530.145

ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ И ВНЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

(Поступила в редакцию 5 июня 1987 г.)

Вычислены перенормированные вакуумные средние тензора энергии-импульса электромагнитного поля внутри и вне идеально проводящей цилиндрической поверхности. Регуляризация проведена с помощью обобщенной формулы Абеля—Плана. Показано, что компаненты вакуумного тензора энергии-импульса удовлетворяют уравнению непрерывности. Приведены результаты численных расчетов этих величин.

1. Эффект Казимира является одним из простых примеров зависимости свойств вакуума квантованного поля от многообразия, на котором рассмат-

ривается данное поле [1, 2]. Он заключается в изменении вакуумных средних физических величин вследствие модификации квантовых флуктуаций вакуума из-за наличия границ у многообразия. Эффект Казимира имеет важное значение при вычислении ван-дер-ваальсовых сил между макроскопическими телами, в модели MIT мешка для адронов, в теориях типа Калузы-Клейна, при изучении структуры вакуума в нелинейных теориях поля. В настоящее время он исследован для разных полей в многообразиях с границами различной формы (см., например, [3—5]). В большинстве этих работ рассматриваются глобальные характеристики поля, такие как полная энергия, свободная энергия и т. д. Однако представляют интерес (например в теории гравитации) и локальные величины, наиболее важным из которых является тензор энергии-импульса (ТЭИ). Вакуумные средние ТЭИ в эффекте Казимира исследованы лишь в некоторых простых случаях [2, 6—9]. В [10] получены асимптотические разложения вакуумного ТЭИ вблизи гладкой границы произвольной формы. В частности, показано, что они неинтегрируемым образом расходятся на границе (за исключением случая плоских границ и конформно инвариантного поля).

Настоящая работа посвящена вычислению и изучению свойств вакуумных средних ТЭИ электромагнитного поля для областей, ограниченных идеально проводящей цилиндрической поверхностью. Кроме самостоятельного физического интереса ее результаты могут быть использованы также при вычислении аналогичных квантовых поправок к глюонным трубкам в вакууме квантовой хромодинамики.

2. Вакуумные средние ТЭИ электромагнитного поля при наличии границ определяются выражением [1, 2]

$$\langle 0|T_{ik}|0\rangle = \sum_{\alpha} T_{ik}\{A_\alpha(x),\ A^*_\alpha(x)\}, \tag{1}$$

где билинейная по полю форма $T_{ik}\ \{f,\ g\}$ определяется видом классического ТЭИ, (A_α, A^*_α) — полная ортонормированная система положительно- и отрицательно-частотных решений уравнений поля, удовлетворяющих граничным условиям (набор индексов α может содержать как дискретные, так и непрерывные составляющие). В соответствии с симметрией задачи в качестве A_α будем брать решения, описывающие цилиндрические волны магнитного (ниже $\lambda=0$) и электрического ($\lambda=1$) типов. Подставляя соответствующие им векторы-потенциалы в формулу (1), в области внутри цилиндрической поверхности радиуса a получим

$$\langle 0|T_k^i|0\rangle = \mathrm{diag}(\varepsilon,\ -p_1,\ -p_2,\ -p_3), \tag{2}$$

где выбрана цилиндрическая система координат $(r,\ \varphi,\ z)$ с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_3$ направлен вдоль оси цилиндра).

Плотность энергии ε и давление p_i в направлении $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, 3)$ даются выражениями $(\hbar=c=1)$

$$q=\frac{1}{8\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \sum_{\gamma,\lambda}\beta^2_{\lambda m} f_m^{(q)}(\gamma r),\ q=\varepsilon,\ p_1,\ p_2 \tag{3}$$

и $p_3=\varepsilon-p_1-p_2$ (след ТЭИ равен нулю). Здесь

$$f_m^{(q)}(\gamma r)=\begin{cases} J_m^2(\gamma r)+(2k^2+\gamma^2)[J_m'^2(\gamma r)+m^2\,J_m^2(\gamma r)/\gamma^2 r^2]/\gamma^2, & q=\varepsilon\\ (-1)^i\,J_m'^2(\gamma r)+[1+(-1)^i\,m^2/\gamma^2 r^2]\,J_m^2(\gamma r), & q=p_i,\ i=1,2,\end{cases} \tag{4}$$

а $J_m(x)$ — функция Бесселя с целочисленным индексом m. В (3) суммирование проводится по тем γ, для которых

$$J_m'(\gamma a)=0 \text{ при } \lambda=0,\quad J_m(\gamma a)=0 \text{ при } \lambda=1. \tag{5}$$

Они получаются из граничных условий $\mathbf{e}_1\times\mathbf{E}=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{H}=0$ ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности поля) на идеально проводящей цилиндрической поверхности $r=a$. Коэффициенты $\beta_{\lambda m}$ определяются из условия нормировки функций $A_\alpha(x)$ и равны

$$\beta_{\lambda m}^{-2}=\gamma^{-2}\,\pi\omega a^2\,[J_m'^2(\gamma a)+(1-m^2/\gamma^2 a^2)\,J_m^2(\gamma a)]. \tag{6}$$

3. Вакуумные средние, определяемые формулами (3), как и в случае пустого пространства, расходятся. Их регуляризация сводится к вычитанию из $<0\mid T_{ik}\mid 0>$ ТЭИ электромагнитного поля для неограниченного пространства (пространство Минковского):

$$\mathrm{reg}<0|T_{ik}|0>=<0|T_{ik}|0>-<\overline{0}|\,T_{ik}|\overline{0}>. \tag{7}$$

Чтобы вычислить разность двух бесконечных величин, воспользуемся известным методом [2]. Введем в эти величины обрезающую функцию $\psi_{\mu_1\mu_2}(k,\gamma)$, такую, чтобы каждая из них стала конечной (μ_1 и μ_2 — параметры обрезания соответственно по k и γ, $\psi_{00}=1$). После вычисления соответствующей разности устремим $\mu_1,\ \mu_2\to 0$. При этом результат, естественно, не должен зависеть от вида функции ψ.

Итак, рассмотрим следующие конечные величины:

$$q=\frac{1}{8\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\sum_{\gamma,\lambda}\beta_{\lambda m}^2\,\psi_{\mu_1\mu_2}(k,\gamma)\,f_m^{(q)}(\gamma r),\quad q=\varepsilon,\ p_l. \tag{8}$$

Для суммирования ряда по γ воспользуемся формулой [11]

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\nu,k}\,f(\lambda_{\nu,k})}{(\lambda_{\nu,k}^2-\nu^2)\,J_\nu^2(\lambda_{\nu,k})+\lambda_{\nu,k}^2\,J_\nu'^2(\lambda_{\nu,k})}=\int_0^\infty f(x)\,dx+$$

$$+\frac{\pi}{2}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{AY_\nu(z)+Bz\,Y_\nu'(z)}{AJ_\nu(z)+Bz\,J_\nu'(z)}f(z)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{AK_\nu(x)+Bx\,K_\nu'(x)}{AI_\nu(x)+Bx\,I_\nu'(x)}\,[e^{-\nu\pi i}f(xe^{\pi i/2})+e^{\nu\pi i}f(xe^{-\pi i/2})]\,dx, \tag{9}$$

где $\lambda_{\nu,k}\neq 0$ ($\mathrm{Re}\lambda_{\nu,k}\leqslant\mathrm{Re}\lambda_{\nu,k+1}$) — корни функции $AJ_\nu(z)+Bz\,J_\nu'(z)$ (A и B — произвольные вещественные постоянные) в правой полуплоскости z, I_ν и K_ν — модифицированные функции Бесселя. Она справедлива для аналитической в правой полуплоскости функции $f(z)$, растущей на бесконечности медленнее, чем $\exp(2|z|)$ (на мнимой оси $f(z)$ может иметь точки ветвления типа $(z^2+c^2)^{\pm 1/2}$). Отметим, что при $B=0$, $\nu=1/2$ из (9) получается формула суммирования Абеля — Плана [2].

В (9) положим

$$f(z)=\frac{z^3 f_m^{(q)}(zx)}{\sqrt{z^2/a^2+k^2}}\,\psi_{\mu_1\mu_2}(k,\ z/a),\quad x=r/a, \tag{10}$$

приняв $A=0$ при $\lambda=0$ и $B=0$ при $\lambda=1$. Можно убедиться, что первый интеграл в правой части (9) представляет собой вклад пространства Минковского, и поэтому регуляризация (7) сводится к его отбрасыванию. Остальные слагаемые в (9) сходятся настолько быстро, что в них обрезание можно снять, положив $\mu_1=\mu_2=0$ (результат перенормировки не зависит от вида обрезающей функции).

После преобразований для регуляризованных компонент ТЭИ внутри идеально проводящей цилиндрической поверхности получаем (далее символ reg опускается)

$$q=\frac{1}{4\pi^2 a^4}\sum_{m=0}^{\infty}{}'\int\limits_0^{\infty} dz\,F_m^{(q)}(z,\ zx),\quad q=\varepsilon,\ p_1;\ \ p_3=-\varepsilon,\ \ p_2=2\varepsilon-p_1, \tag{11}$$

штрих у знака суммы означает, что член с $m=0$ следует брать с весом 1/2,

$$F_m^{(q)}(z,\ zx)=z^3\left[\frac{K_m(z)}{I_m(z)}+\frac{K_m'(z)}{I_m'(z)}\right]\times$$

$$\times\begin{cases} I_m^2(zx),\ q=\varepsilon \\ (1+m^2/z^2x^2)\,I_m^2(zx)-I_m'^{\,2}(zx),\ q=p_1. \end{cases} \tag{12}$$

На оси цилиндрической поверхности ($x=0$) в (11) вклад дает только член с $m=0$: $\varepsilon(0)=p_1(0)=-0{,}01677/a^4$.

Мы рассмотрели область внутри идеально проводящей цилиндрической поверхности. Аналогичным образом можно исследовать область вне цилиндрической поверхности. Вакуумные средние ТЭИ электромагнитного поля в этой области по-прежнему имеют вид (2), (11), где теперь $x=r/a\geqslant 1$, а

$$F_m^{(q)}(z,\ zx)=z^3\left[\frac{I_m(z)}{K_m(z)}+\frac{I_m'(z)}{K_m'(z)}\right]\times$$

$$\times\begin{cases} K_m^2(zx),\ q=\varepsilon \\ (1+m^2/z^2x^2)\,K_m^2(zx)-K_m'^{\,2}(zx),\ q=p_1. \end{cases} \tag{13}$$

Чтобы показать, насколько быстро сходятся выражения (11), рассмотрим функции $F_m^{(q)}$ при больших значениях m. С помощью равномерных асимптотических разложений модифицированных функций Бесселя находим

$$F_m^{(\varepsilon)}(mz,\ mzx)\simeq\mp\frac{m}{2}z^5 t(zx)\,t^3(z)\left\{1\mp\frac{1}{12m}\left[t(z)(t^2(z)-3)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,t(zx)(5t^2(zx)-3)\right]\right\}\exp\{\pm 2m[\eta(zx)-\eta(z)]\},$$

$$F_m^{(p_1)} \simeq -\frac{1}{2} z^5 t^2(zx)\, t^3(z) \exp\left[\pm 2m\left[\eta(zx) - \eta(z)\right]\right], \tag{14}$$

где верхние знаки относятся к случаю $x < 1$, а нижние — $x > 1$ и введены стандартные обозначения:

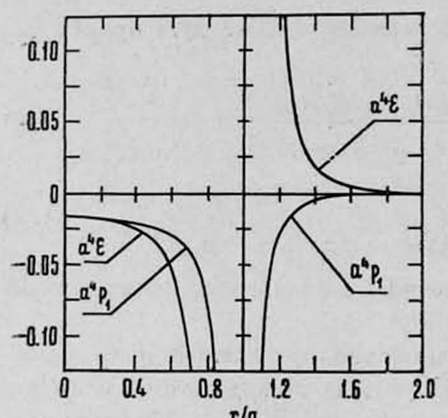
$$t(z) = 1/\sqrt{1+z^2},\ \eta(z) = \sqrt{1+z^2} + \ln\left[z/(1+\sqrt{1+z^2})\right].$$

Видно, что при $m \to \infty$, $x \neq 1$ функции $F_m^{(q)}$ экспоненциально стремятся к нулю. На цилиндрической поверхности ($x = 1$) ТЭИ расходится (см. (14)).

Чтобы найти главные члены разложений компонент ТЭИ в окрестности границы, заметим, что вблизи поверхности основной вклад дают большие m, при которых верны формулы (14). Заменив в (11) функции $F_m^{(q)}$ выражениями (14), после суммирования по m и последующего разложения по $(1-x)$ находим

$$p_1 \simeq -1/[60\,\pi^2 a^4 (1-x)^2],\ \varepsilon \simeq p_2/2 \simeq -1/[60\,\pi^2 a^4 (1-x)^3]. \tag{15}$$

Эти выражения являются частными случаями общих формул работы [10], где подробно обсуждается природа расходимостей на поверхности.



Плотность энергии вакуума ε и радиальное давление p_1 в зависимости от расстояния r до оси идеально проводящей цилиндрической поверхности радиуса a.

Формулы (11) выведены в предположении, что взаимодействие квантованного электромагнитного поля с проводником описывается граничными условиями (5), соответствующими идеальной проводимости. Из асимптотических разложений (14) следует, что основной вклад в $q(r)$ дают частоты $\omega \lesssim |a-r|^{-1}$. Следовательно, (11) остается в силе и для неидеальных проводников вплоть до расстояний r, при которых $|a-r|^{-1} \ll \omega_0$, где ω_0 — характерная для данного проводника частота, такая, что при $\omega \gtrsim \omega_0$ условие идеальной проводимости нарушается.

Из выражений (11)—(13) нетрудно убедиться, что компоненты вакуумного ТЭИ удовлетворяют уравнению непрерывности, которое для нашей системы принимает вид $p_1'(r) + 2\,(p_1 - \varepsilon)/r = 0$. Его можно записать также в интегральной форме

$$p_1(r) = \frac{2}{r^2} \int\limits_{v(r)}^{r} \varepsilon(t)\, t\, dt = \operatorname{sgn}(a-r) \frac{E(r)}{\pi r^2}, \tag{16}$$

где $E(r)$ — энергия вакуума, приходящаяся на единицу длины вдоль оси цилиндра, внутри $(r < a)$ или вне $(r > a)$ цилиндрической поверхности радиуса r: $v(r) = 0$, если $r < a$, и $v(r) = \infty$, если $r > a$. В частности, видно, что полная энергия вакуума внутри и вне поверхности есть [12]

$$E = \pi a^2 [p_1(a-0) - p_1(a+0)].$$

Результаты численных расчетов по формулам (11)—(13) компонент регуляризованного вакуумного ТЭИ внутри и вне идеально проводящей цилиндрической поверхности приведены на рисунке.

Автор признателен Г. С. Саакяну и Л. Ш. Григоряну за интерес к работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Де Витт Б. С.* Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени. В сб. «Черные дыры». Изд. Мир, М., 1978.
2. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Атомиздат, М., 1980.
3. *Balian R., Duplantier B.* Ann. Phys., 112, 165 (1978).
4. *Ambjorn J., Wolfram S.* Ann. Phys., 147, 1 (1983).
5. *Plunien G., Müller B., Greiner W.* Phys. Rep., 134, 87 (1986).
6. *Brown L. S., Maclay G. J.* Phys. Rev., 184, 1272 (1969).
7. *Milton K. A., De Raad L. L., Schwinger J.* Ann. Phys., 115, 383 (1978).
8. *Brevik I., Kolbenstvedt H.* Can. J. Phys., 62, 805 (1984).
9. *Григорян Л. Ш., Саарян А. А.* Изв. АН АрмССР, Физика, 22, 3 (1987).
10. *Deutsch D., Candelas P.* Phys. Rev., D20, 3063 (1979).
11. *Саарян А. А.* Изв. АН АрмССР, Математика, 22, 181 (1987).
12. *De Raad L. L., Milton K. A.* Ann. Phys., 136, 229 (1981).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ–ԻՄՊՈՒԼՍԻ ԹԵՆԶՈՐԻ ՎԱԿՈՒՈՒՄԱՅԻՆ ՄԻՋԻՆՆԵՐԸ ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՆԵՐՍՈՒՄ ԵՎ ԴՐՍՈՒՄ

Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Գտնված են վերանորմավորված էներգիայի-իմպուլսի թենզորի բաղադրիչների վակուումային միջինները իդեալական հաղորդիչ գլանային մակերևույթի ներսում և դրսում։ Ցույց է տրված, որ այդ մեծությունները բավարարում են անընդհատության հավասարմանը։ Բերված են դրանց թվային հաշվարկների արդյունքները։ Վակուումի էներգիայի խտությունը գլանային մակերևույթի ներսում բացասական է, իսկ դրսում՝ դրական։ Ռադիալ ճնշումը ամենուրեք բացասական է։ Ցույց է տրված, որ վակուումային ճնշումը առանցքի ուղղությամբ հավասար է էներգիայի խտությանը հակառակ նշանով։

VACUUM EXPECTATION VALUES OF THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR OF ELECTROMAGNETIC FIELD INSIDE AND OUTSIDE THE CYLINDRICAL SURFACE OF A PERFECT CONDUCTOR

A. A. SAHARYAN

The renormalized vacuum expectation values of the energy-momentum tensor in-
ide and outside the cylindrical surface of a perfect conductor are calculated. The
s

components of this tensor are shown to satisfy the continuity equation. Results of numerical claculations are presented. The vacuum energy density is negative inside the cylindrical surface and is positive outside it. The radial pressure is negative everywhere. The vacuum pressure in the axial direction is shown to be equal to the energy density with opposite sign.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 23, вып. 3, 136—140 (1988)

УДК 535.371:373

МЕХАНИЗМЫ НАРУШЕНИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ПЕРЕНОСЕ ЭНЕРГИИ

А. С. АГАБЕКЯН

НПО «Лазерная техника» ЕГУ

(Поступила в редакцию 3 марта 1987 г.)

Исследована динамика образования и нарушения когерентности переноса энергии под воздействием различных релаксационных процессов при безызлучательном переносе энергии электронного возбуждения между двумя примесными ионами в твердотельной матрице.

Физические механизмы, сохраняющие фазовую когерентность процессов, имеют много интересных проявлений в различных областях физики. В безызлучательном переносе энергии электронного возбуждения наиболее хорошо изучены спектроскопические проявления когерентности. Менее изучены временные проявления как в теории экситонов, так и в резонансном переносе энергии между примесными ионами в различных средах. До сих пор довольно расплывчато определено само понятие когерентности при переносе энергии, неточно разграничены когерентные и некогерентные процессы и не выяснена полностью роль релаксационных процессов в нарушении когерентности переноса энергии.

Целью настоящей работы является исследование динамики образования и нарушения когерентности процесса переноса энергии под воздействием различных релаксационных процессов при переносе энергии между двумя примесными ионами в твердотельной матрице.

Существует несколько подходов к теоретическому описанию процесса переноса энергии [1—3]. Один из них связан с использованием уравнения Шредингера для амплитуд вероятностей возбужденных состояний донора и акцептора с феноменологически введенными временами жизни состояний [1]. Такое описание оказалось неполным, так как не позволило учесть фазовую релаксацию состояний. В другом подходе раздельное введение времен жизни и фазовой релаксации ионов в уравнения для матрицы плотности процесса позволило выделить предельные физические процессы переноса энергии вместе с критериями их применимости [2].

Понятие когерентности процесса обычно связывается с недиагональ-