

УДК 524.86

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Р. С. ВАРДАНЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

(Поступила в редакцию 25 апреля 1986 г.)

Рассматриваются задачи переноса излучения в одномерной полубесконечной среде и в среде конечной толщины. Предполагается, что вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния является однородным, экспоненциально-коррелированным гауссовским случайным полем. Для решения уравнения Дайсона в приближении Бурре применяется метод нелинейных уравнений факторизации.

В работах [1—3] были рассмотрены некоторые задачи переноса излучения в предположении, что вероятность λ выживания кванта является случайной величиной. Как было отмечено в [2], такая ситуация возникает при рассмотрении переноса излучения в резонансной линии, если концентрация n_e свободных электронов или электронная температура T_e являются случайными функциями координат или времени. В работах [2, 3] на основе применения метода преобразования Фурье были рассмотрены некоторые задачи переноса в бесконечной среде. В настоящей статье рассматриваются задачи переноса в полубесконечной среде и в среде конечной толщины в предположении, что $\lambda = \Lambda(x)$ является однородным гауссовым случайным полем с экспоненциальной корреляционной функцией. Как и в работах [2, 3], соответствующие уравнения Дайсона будут решаться в приближении Бурре, причем будет применяться метод нелинейных уравнений факторизации [4—6].

1. Полубесконечная среда. Уравнение Дайсона в приближении Бурре в случае полубесконечной среды имеет вид [2]

$$S_1(x) = g_0(x) + \int_0^\infty \int_0^\infty \Gamma_0(x, y) Q_1(y, t) S_1(t) dy dt. \quad (1)$$

Здесь $\Gamma_0(x, y)$ — решение уравнения

$$\Gamma_0(x, y) = K(x - y) + \lambda_0 \int_0^\infty K(x - t) \Gamma_0(t, y) dt, \quad (2)$$

где $K(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, λ_0 — среднее значение поля $\Lambda(x)$, а ядро массового оператора $\hat{Q}_1$ в приближении Бурре есть

$$Q_1(x, y) = \sigma^2 \Gamma_0(x, y) e^{-\beta|x-y|}, \quad (3)$$

σ^2 — дисперсия поля $\Lambda(x)$, $l = \beta^{-1}$ — радиус корреляции поля $\Lambda(x)$.

Перепишем уравнение (1) в операторном виде

$$S_1 = g_0 + \hat{\Gamma}_0 \hat{Q}_1 S_1, \quad (4)$$

где $\hat{\Gamma}_0$ и $\hat{Q}_1$ — интегральные операторы:

$$(\hat{\Gamma}_0 f)(x) = \int_0^\infty \Gamma_0(x, t) f(t) dt, \quad (\hat{Q}_1 f)(x) = \int_0^\infty Q_1(x, t) f(t) dt.$$

Для решения (4) преобразуем его в систему интегральных уравнений. Введем функцию $S_2 = \hat{Q}_1 S_1$. Тогда (4) можно переписать в виде

$$S(x) = g(x) + \int_0^\infty T(x, t) S(t) dt, \quad (5)$$

где $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$ — искомая вектор-функция, $g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} g_0(x)$ — заданная вектор-функция, а $T(x, y)$ — матрица-функция:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0(x, y) \\ Q_1(x, y) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для полубесконечной среды $\Gamma_0(x, y)$ имеет вид

$$\Gamma_0(x, y) = \frac{1}{2\alpha} \left[e^{-\alpha|x-y|} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} e^{-\alpha(x+y)} \right], \quad (7)$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \lambda_0}.$$

С учетом (7) и (3) матрицу-функцию $T(x, y)$ можно представить в виде

$$T(x, y) = T_1(x-y) + T_2(x, y), \quad (8)$$

где

$$T_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x|} \\ \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\gamma|x|} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2(x, y) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma^2 e^{-\beta|x-y|} & 0 \end{pmatrix} e^{-\alpha(x+y)}. \quad (9)$$

$\hat{T}_1$ является интегральным оператором типа Винера-Хопфа, а $\hat{T}_2$ не является таковым.

Перепишем уравнение (5) в виде

$$(\hat{I} - \hat{T}_1) S = g + \hat{T}_2 S. \quad (10)$$

Уравнение (10) можно решить методом итераций. Определим следующий итерационный процесс:

$$(\hat{I} - \hat{T}_1) S^{(n+1)} = g + \hat{T}_2 S^{(n)}, \quad (11)$$

$$S^{(0)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из (11) видно, что для нахождения $S^{(n)}$ каждый раз следует решать матричное уравнение Винера-Хопфа вида

$$(\hat{I} - \hat{T}_1) f = f_0. \quad (12)$$

Рассмотрим следующую задачу факторизации:

$$\hat{I} - \hat{T}_1 = (\hat{I} - \hat{V}_-) (\hat{I} - \hat{V}_+), \quad (13)$$

где $\hat{V}_\pm$ — вольтерровские операторы:

$$(\hat{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t) f(t) dt, \quad (\hat{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x) f(t) dt; \quad (14)$$

$V_\pm$ определяются из системы [4, 5]

$$V_+(x) = T_1(x) + \int_0^\infty V_-(t) V_+(x+t) dt, \quad (15)$$

$$V_-(x) = T_1(-x) + \int_0^\infty V_-(x+t) V_+(t) dt.$$

Учитывая соотношение

$$T_1^\perp(-x) = T_1(x), \quad (16)$$

где значком $\perp$ обозначена операция транспонирования относительно второй диагонали, из (15) получаем

$$V_+^\perp(x) = V_-(x). \quad (17)$$

Следовательно, для $V_+(x)$ имеем уравнение

$$V_+(x) = T_1(x) + \int_0^\infty V_+^\perp(t) V_+(x+t) dt, \quad (18)$$

решение которого ищем в виде

$$V_+(x) = \begin{pmatrix} b e^{-\gamma x} & a e^{-\alpha x} \\ c e^{-\gamma x} & b e^{-\alpha x} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Подстановка (19) в (18) приводит к следующей системе для определения коэффициентов a, b, c :

$$a = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{ab}{a}, \quad b = \frac{ac + b^2}{a + \gamma}, \quad c = \frac{\sigma^2}{2\alpha} + \frac{bc}{\gamma}. \quad (20)$$

Факторизация (13) сводит решение (12) к последовательному решению следующих двух уравнений вольтерровского типа:

$$F(x) = f_0(x) + \int_x^\infty V_-(t-x) F(t) dt, \quad (21)$$

$$f(x) = F(x) + \int_0^x V_+(x-t) f(t) dt. \quad (22)$$

Решения этих уравнений выражаются через соответствующие резольвентные функции $\Phi_\pm(x)$ следующим образом:

$$F(x) = f_0(x) + \int_x^\infty \Phi_-(t-x) f_0(t) dt, \quad (23)$$

$$f(x) = F(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t) F(t) dt. \quad (24)$$

$\Phi_\pm(x)$ являются решениями уравнений

$$\Phi_\pm(x) = V_\pm(x) + \int_0^x V_\pm(x-t) \Phi_\pm(t) dt. \quad (25)$$

Представим $V_-(x)$ в виде

$$V_-(x) = J(x) V_0,$$

где

$$J(x) = \begin{pmatrix} e^{-ax} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma x} \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} b & a \\ c & b \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Имеем

$$J^{-1}(x) = J(-x), \quad J(x+t) = J(x) J(t). \quad (27)$$

С учетом (26) и (27) после некоторых преобразований для $\Phi_-(x)$ получаем выражение

$$\Phi_-(x) = L_+ e^{-\beta_+ x} + L_- e^{-\beta_- x}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_\pm &= \frac{\gamma + a - 2b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4ac}, \\ L_\pm &= \begin{pmatrix} \eta^\pm & \zeta^\pm \\ m^\pm \eta^\pm & m^\pm \zeta^\pm \end{pmatrix}, \quad m^\pm = -\frac{b - a + \beta_\pm}{a}, \\ \eta^\pm &= \frac{m^\pm b - c}{m^\mp - m^\pm}, \quad \zeta^\pm = \frac{m^\mp a - b}{m^\mp - m^\pm}. \end{aligned} \quad (29)$$

Можно показать, что

$$\Phi_+(x) = \Phi_-^\dagger(x) = L_+^\dagger e^{-\beta_+ x} + L_-^\dagger e^{-\beta_- x}. \quad (30)$$

С помощью полученных формул (23), (24), (29) и (30) легко можно найти несколько первых членов итерационной последовательности $S^{(n)}$.

Пусть

$$g_0(x) = \frac{2}{1+\alpha} e^{-\alpha x}. \quad (31)$$

Для первой итерации $S^{(1)}(x)$ в этом случае получаем выражение

$$S^{(1)}(x) = l_+ e^{-\beta_+ x} + l_- e^{-\beta_- x}, \quad (32)$$

где $l_{\pm}$ — постоянные векторы:

$$l_{\pm} = \frac{1}{1-\beta_{\pm}} F_0, \quad (33)$$

$$F_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L_+}{1+\beta_+} + \frac{L_-}{1+\beta_-} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что искомая функция $S^{(1)}_1(x)$ является первой компонентой вектор-функции $S^{(1)}(x)$.

2. Среда конечной толщины. Уравнение Дайсона в приближении Бурре для данной задачи есть

$$S_1(x) = g_0(x) + \int_0^x \int_0^t \Gamma_0(x, y) Q_1(y, t) S_1(t) dy dt, \quad (34)$$

где $\Gamma_0(x, y)$ теперь имеет вид

$$\Gamma_0(x, y) = -\frac{\text{sh } \alpha(x-y)}{\alpha} \theta(x-y) - \frac{2}{\alpha A} \gamma(x) \gamma(r-y), \quad (35)$$

$$\gamma(x) = \text{sh } \alpha x + \alpha \text{ch } \alpha x,$$

$$A \equiv A(r) = (1-\alpha)^2 e^{-\alpha r} - (1+\alpha)^2 e^{\alpha r},$$

а $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Уравнение (34) также можно преобразовать в систему уравнений и представить в виде (5)

$$S = g + \hat{T} S,$$

$$(\hat{T}f)(x) = \int_0^x T(x, t) f(t) dt, \quad (36)$$

где матрица-функция T имеет вид (6), но с Γ_0 , определяемым из (35) и $Q_1(x, y) = \sigma^2 \Gamma_0(x, y) e^{-\beta|x-y|}$.

При решении (36) применим метод нелинейных уравнений факторизации [6]. Рассмотрим факторизацию

$$\hat{I} - \hat{T} = (\hat{I} - \hat{\Psi}_+) (\hat{I} - \hat{\Psi}_-), \quad (37)$$

где $\hat{\Psi}_{\pm}$ — вольтерровские операторы:

$$(\hat{\Psi}_- f)(x) = \int_x^x \Psi_-(t, x) f(t) dt, \quad (\hat{\Psi}_+ f)(x) = \int_0^x \Psi_+(x, t) f(t) dt; \quad (38)$$

$\Psi_{\pm}$ удовлетворяют следующей системе:

$$\Psi_+(x, y) = T(x, y) + \int_0^y \Psi_+(x, t) \Psi_-(y, t) dt, \quad x > y, \quad (39)$$

$$\Psi_-(x, y) = T(y, x) + \int_0^y \Psi_+(y, t) \Psi_-(x, t) dt.$$

Можно показать, что $T^+(x, y) = T(y, x)$. Используя это свойство матрицы-функции $T(x, y)$, можно убедиться, что

$$\Psi_+(x, y) = \Psi_-^+(x, y). \quad (40)$$

Следовательно, для $\Psi_-(x, y)$ получаем уравнение

$$\Psi_-(x, y) = T(y, x) + \int_0^y \Psi_-^+(y, t) \Psi_-(x, t) dt, \quad x > y, \quad (41)$$

Решение (37) ищем в виде

$$\Psi_-(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) e^{-\beta x} & \varphi_3(y) \\ \varphi_2(y) e^{-\beta x} & \varphi_1(y) e^{-\beta y} \end{pmatrix} \gamma(r-x). \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41), для $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) получим систему нелинейных уравнений типа Вольтерра, которая сводится к следующей задаче Коши относительно некоторых вспомогательных функций $f_i(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= \frac{4\sigma^2}{a^2 A^2} \gamma^2(x) e^{\beta x} + \gamma^2(r-x) e^{-\beta x} [f_1^2 + 4f_2 f_3] - \\ &\quad - \frac{4}{aA} \gamma(x) \gamma(r-x) [\sigma^2 f_3 e^{\beta x} + f_2 e^{-\beta x}], \\ \frac{df_2}{dx} &= -\frac{2\sigma^2}{aA} \gamma(x) \gamma(r-x) e^{\beta x} f_1 + 2\gamma^2(r-x) e^{-\beta x} f_1 f_2, \\ \frac{df_3}{dx} &= -\frac{2}{aA} \gamma(x) \gamma(r-x) e^{-\beta x} f_1 + 2\gamma^2(r-x) e^{-\beta x} f_1 f_3, \\ f_i(0) &= 0. \end{aligned}$$

$\varphi_i(x)$ выражаются через $f_i(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \gamma(r-x) f_1(x), \\ \varphi_2(x) &= -\frac{2\sigma^2}{aA} \gamma(x) e^{\beta x} + 2\gamma(r-x) e^{-\beta x} f_2(x), \\ \varphi_3(x) &= -\frac{2}{aA} \gamma(x) + 2\gamma(r-x) f_3(x). \end{aligned}$$

Факторизация (37) сводит решение (36) к последовательному решению следующих уравнений:

$$(\hat{I} - \hat{\Psi}^+) F = g, \quad (\hat{I} - \hat{\Psi}_-) S = F. \quad (43)$$

Решение первого из уравнений (43) можно представить в виде

$$F = g + \hat{j} \Omega,$$

где

$$\hat{j}(x) = \gamma(r-x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}.$$

$\Omega(x)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Omega_0 + \hat{\varphi} \hat{j} \Omega, \quad \Omega(0) = 0,$$

где

$$\Omega_0 = \hat{\varphi} g, \quad \hat{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 e^{-2x} & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Решение второго из уравнений (43) также можно свести к решению задачи Коши:

$$\frac{d\xi}{dx} = -\hat{j}^\perp F - \hat{j}^\perp \hat{\varphi}^\perp \xi,$$

$$\xi(r) = 0,$$

где $\xi(x)$ — вектор-функция: $\xi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \end{pmatrix}$.

Решение уравнения Дайсона в приближении Бурре выражается через F , φ и ξ следующим образом:

$$S_B \equiv S_1 = F_1 + \varphi_1 \xi_1 + \varphi_3 \xi_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Енибарян Н. Б., Никогосян А. Г. В сб. «Звезды, туманности, галактики». Изд. АН АрмССР, Ереван, 1969.
2. Варданыан Р. С. Астрофизика, 24, 549 (1986).
3. Варданыан Р. С. Изв. АН АрмССР, Физика, 21, 184 (1986).
4. Енибарян Н. Б. Изв. АН АрмССР, Математика, 15, 233 (1980).
5. Енибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. Итоги науки и техники, мат. анализ, 22, ВИНТИ, М., 1984.
6. Енибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. ДАН СССР, 206, 4 (1972).

ՀԱՌԱԿԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ռ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ն. Բ. ԵՆԻԲԱՐՅԱՆ

Դիտարկված են միաչափ կիսանվերջ միջավայրում և վերջավոր շերտում ճառագայթման տեղափոխման որոշ խնդիրներ այն ենթադրությամբ, որ ցրման տարրական ակտի ժամանակ բխման վերադարձն չի հաշվանկարությունը հանդիսանում է համասեռ զառույան պատահական թաշտ: Դիտարկված խնդիրների համար համապատասխան Դալսոնի հավասարումը լուծվում է Բուրբյի մոտավորությամբ, ընդ որում կիրառվում է օպերատորների ֆակտորիզացիայի ոչ-գծային հավասարումների մեթոդը:

ON THE TRANSFER OF RADIATION IN A STOCHASTIC MEDIUM

R. S. VARDANYAN, N. B. YENGIBARYAN

Some problems of radiation transfer in one-dimensional semi-infinite and finite thickness media are considered under the assumption, that the quantum survival

probability λ is a Gaussian field with an exponential correlation function. The corresponding Dyson equation is solved by means of the method of nonlinear equations of integral operator factorization.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 23, вып. 1, 16—20 (1988)

УДК 533.901.922

ОБ ИНТЕГРАЛЕ РАДИАЦИОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ

А. В. АКОПЯН

Институт радиопизики и электроники АН АрмССР

(Поступила в редакцию 20 марта 1986 г.)

На основе представления о вероятностях переходов построены общие выражения для интегралов, описывающие изменение распределения частиц в процессах столкновений, сопровождающихся излучением квантов произвольной поляризации. Приводятся уравнения для излученных квантов.

1. В современной кинетической теории газов (нейтральных и заряженных) состояние системы описывается с помощью кинетического уравнения, имеющего вид

$$\hat{L}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{st}. \quad (1)$$

Здесь f — функция распределения частиц, $\hat{L}$ — некоторый оператор, зависящий от внешних факторов и описывающий изменение функции распределения в конфигурационном пространстве. Стоящий в правой части (1) интеграл столкновений $(\partial f/\partial t)^{st}$ описывает столкновительную эволюцию распределения частиц во времени. При этом, как правило, предполагается, что столкновения частиц не сопровождаются излучением реальных электромагнитных волн. К настоящему времени, начиная с основополагающих работ Больцмана и Ландау, в литературе достаточно подробно изучена структура интеграла безызлучательных столкновений частиц как в нейтральных и ионизированных свободных газах [1—4], так и в твердотельной плазменной среде [5, 6].

Вместе с тем естественно допустить, что элементарные акты столкновений зарядов между собой и с нейтрами могут сопровождаться испусканием квантов реальных волн разной поляризации. Условимся, в согласии с [7], такие неупругие процессы называть радиационными столкновениями (РС). В физике существует широкий круг явлений, в которых излучение волн обусловлено именно РС частиц в вакууме и среде. Подчеркнем, что, испускаемое при РС излучение в общем случае будет иметь более сложную картину, чем тормозное излучение при свободно-свободных переходах.

С учетом столкновительно-излучательных процессов в правой части кинетического уравнения (1) следует добавить новый член $(\partial f/\partial t)^{rst}$ —