

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФОКУСА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
ЗЕРКАЛА

Э. Д. ГАЗАЗЯН, А. А. АСАТРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 20 февраля 1986 г.)

Исследуется вопрос устойчивости фокуса параболического зеркала относительно деформации его поверхности и к направлению падения первичной волны. Показано, что при малых деформациях фокус распадается на два близких каустических «кляюза», а при наклонном падении переходит на простую каустическую ветвь. Определены условия существования фокальной точки в каждом из рассмотренных случаев.

Фокус параболического зеркала является простейшим примером структурно-неустойчивых каустик. В настоящей работе исследуется вопрос структурной устойчивости фокуса (устойчивости особенности) параболического зеркала вращения

$$\tilde{z} = \frac{x^2 + y^2}{4F} \quad (1)$$

относительно деформаций поверхности зеркала и при отклонении направления падения плоской волны от осевого.

Деформация поверхности зеркала. Прототипируем слегка исходное параболическое зеркало, положив

$$\tilde{z} = \frac{x^2}{4a} + \frac{y^2}{4b} + \frac{x^4}{c^3} + \frac{y^4}{d^3}; \quad (2)$$

коэффициенты a, b, c и d ($a > b$) определяют деформации зеркала. Пусть на зеркало (2) падает плоская волна. Воспользовавшись интегралом Кирхгофа, запишем поле в окрестности фокуса в виде

$$v = \frac{k}{2\pi i Z} \iint v_0 \exp \left[ik \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (\tilde{z}-Z)^2} \right] dx dy, \quad (3)$$

где X, Y, Z — координаты точки наблюдения, а $v_0 = \exp(-ik\tilde{z})$ — поле на поверхности зеркала.

Разложив фазовую функцию подынтегрального выражения (3) в ряд Тейлора и ограничившись членами, линейными по X, Y, Z и четвертой степени по x и y , получим выражение

$$\varphi = Z - \frac{Xx}{Z} - \frac{Yy}{Z} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{a} \right) \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{b} \right) \frac{y^2}{2} + \\ + \frac{X}{2Z^2} \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{2a} \right) x^3 + \frac{Y}{2Z^2} \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{2a} \right) x^2 y + \frac{X}{2Z^2} \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{2b} \right) xy^2 +$$

$$+ \frac{Y}{2Z^2} \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{2b} \right) y^3 + \left(\frac{1}{8Z^2a} - \frac{1}{8Z^2} - \frac{1}{c^3} \right) x^4 + \\ + \left(\frac{1}{8Z^2a} + \frac{1}{8Z^2b} - \frac{1}{4Z^3} \right) x^2 y^2 + \left(\frac{1}{8Z^2b} + \frac{1}{8Z^3} - \frac{1}{d^3} \right) y^4. \quad (4)$$

В точке наблюдения A с координатами $X_A = Y_A = 0$, $Z_A = a$ после соответствующей замены переменных, отмеченной ниже точкой над знаком равенства, выражение (4) примет вид $\varphi = -x^4 - y^4$. Такая фазовая функция в „теории катастроф“ [1,2] описывает особенность A_3 -типа — „кляв“. Аналогично может быть рассмотрена ситуация в плоскости $X_B = Y_B = 0$ в точке $Z_B = b$: $\varphi = x^4 - y^4$ [1,2].

Поле параболического зеркала в окрестности точки $A(B)$ представится эталонным интегралом Перси [3]

$$v_{A(B)} = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ik q_{A(B)} \left(\xi_1^{A(B)} \tau + \xi_2^{A(B)} \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^4}{4} \right) \right] d\tau,$$

где введены обозначения

$$\xi_1^A = -\sqrt{2} \frac{X}{2a}, \quad \xi_2^A = \frac{-c \left(Z - \frac{a}{2} \right)}{2a^2}, \quad q_A = c,$$

$$\xi_1^B = -\sqrt{2} \frac{Y}{2b}, \quad \xi_2^B = \frac{-d \left(Z - \frac{b}{2} \right)}{2b^2}, \quad q_B = d.$$

Структурно-неустойчивая каустика-фокус при деформациях (2) распалась на две структурно-устойчивые особенности типа A_3 [1, 2]. Уравнения полученных каустических поверхностей («клявы») имеют вид:

$$-\frac{27}{4} \frac{X^3 a^2}{c^3} = (Z - a)^3, \\ -\frac{27}{4} \frac{Y^3 b^2}{d^3} = (Z - b)^3. \quad (5)$$

Фокальная особенность, как геометрический объект, разрушается уже при бесконечно малом отличии a и b от F и $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{d}$ от нуля, тогда как до определенного предела изменения этих отличий волновое поле при достаточно больших, но конечных значениях k практически не должно существенно меняться. Критерий разрушения можно установить, опираясь на понятие «о френелевых объемах». Такие критерии впервые сформулированы в работах [4–6]. В соответствии с этими критериями оба «клява» следует считать различными, если расстояние между их вершинами превышает продольный размер фокального пятна [7]

$$l_1 = \lambda \left(\frac{2F}{D} \right)^2, \quad (6)$$

где D — раскрыв зеркала, λ — длина волны, а именно

$$|a - b| > l_1. \quad (7)$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить, что для различимости двух «клювов» необходимо выполнение условий $c < a$, $d < b$. Когда при деформациях зеркала отсутствуют члены четвертого порядка, $c \rightarrow \infty$, $d \rightarrow \infty$, фокус вырождается в отрезок сагитальной каустики (рис. 1), вблизи которой поле описывается функцией Бесселя [8, 9].

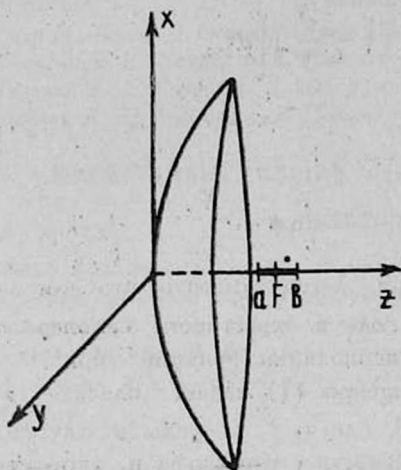


Рис. 1. Растяжение фокуса в сагитальную каустическую.

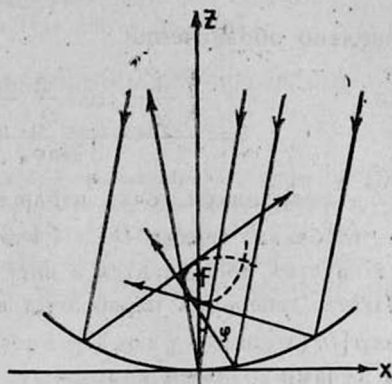


Рис. 2. Каустика, образуемая при наклонном падении плоской волны на параболу.

Наклонное падение плоской волны. Пусть теперь направление падающей плоской волны составляет некоторый угол с осью идеально параболического зеркала. Рассмотрим вначале двумерный случай, когда поверхность зеркала задана уравнением $z = x^2/4F$, а падающая плоская волна — уравнением

$$v = \exp[-ik(x \sin \varphi + z \cos \varphi)].$$

Уравнение каустики отраженных лучей в системе координат x' , z' , $y = y'$, повернутой относительно оси y на угол φ , запишется в виде

$$\left(\frac{z'}{F} - \cos \varphi\right)^2 = \frac{1}{27 \sin \varphi} \frac{x'}{F} \left(\frac{x'}{F} - 9 \sin \varphi\right)^2; \quad (8)$$

оно описывает полукубическую параболу (рис. 2). При уменьшении угла φ «усы» каустики, уменьшаясь, поворачиваются в сторону оси X . Когда падающая плоская волна составляет острый угол с осью X , «усы» каустики скачком принимают противоположные вдоль оси X направления. Каустика имеет самопересечение, если раскрыв зеркала $D > 4\sqrt{3} F$. Даже у короткофокусных зеркал отношение $(F/D) > 0,5$ и, как следует из (8), каустика «усов» не образует.

Воспользовавшись упомянутыми выше критериями, можно оценить величину угла падения плоской волны, при котором фокус растягивается

в простую ветвь каустики (особенность типа A_2). Для этого (для зеркала с заданными F и D) необходимо, чтобы расстояние между ветвями каустики было бы не менее размера продольного фокального пятна (6), т. е.

$$\sin \varphi > \frac{4}{3} \frac{F}{D^2}.$$

Воспользовавшись интегралом Кирхгофа, поле в окрестности каустики представим в виде интеграла Эйри [10]

$$v \sim \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ik \left(\xi - \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau, \quad (9)$$

где введено обозначение

$$\xi = \frac{\left(\frac{Z}{F} \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right)^2}{3 \sin \varphi} - \sin \varphi - \frac{X}{F},$$

X и Z — координаты точки наблюдения. Легко заметить, что для достаточно глубоких зеркал $D > 4\sqrt{3}F$ поле в окрестности самопересекающихся каустик представится в виде суперпозиции функций Эйри.

Пусть теперь на параболоид вращения (1) падает плоская волна $v = \exp[ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)]$, где α, β, γ — углы между падающими лучами и осями координат. Интеграл Кирхгофа в окрестности фокуса параболоида можно представить в виде (3), где

$$v_0 = \exp \left[ik \left(x \cos \alpha + y \cos \beta + \frac{x^2 + y^2}{4f} \cos \gamma \right) \right]$$

— поле на зеркале $\tilde{z} \rightarrow \tilde{z}$. Разлагая фазовую функцию подынтегрального выражения (3) в ряд Тейлора (учитывая отмеченные замены) и ограничиваясь членами третьего порядка, приходим к заключению, что фокус параболоида распадается на две пересекающиеся поверхности, сечения которых в плоскостях $Y = 0, X = 0$ описываются кривыми

$$\frac{X}{F} = \frac{2 \left(\frac{Z}{F} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 \right)^2}{3 \cos \alpha} + \cos \alpha,$$

$$\frac{Y}{F} = \frac{2 \left(2 \frac{Z}{F} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 \right)^2}{3 \cos \beta} + \cos \beta.$$

Легко заметить, что поле в окрестности каустики выражается через интеграл Эйри (9), если в последнем совершить соответствующее преобразование ξ . Предельные значения углов α, β, γ , при которых фокус параболы не разрушается в заданном сечении параболоида вращения, получаются совершенно аналогично двумерному случаю, рассмотренному выше.

Авторы выражают глубокую признательность Ю. А. Кравцову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Изд. Наука, М., 1982.
2. Гилмор П. Прикладная теория катастроф. Изд. Мир, М., 1984, т. 2.
3. Pearcey T. *Phil. Mag.*, 37, 311 (1946).
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. В сб. «Современные проблемы распространения волн», ИРЭАН, 1979.
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. УФН, 132, 475 (1980).
6. Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I. *Rad. Sci.*, 16, 975 (1981).
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд. Наука, М., 1973.
8. Токатлы В. И., Кинбер Б. Е. Изв. вузов. Радиофизика, 14, 761 (1976).
9. Газазян Э. Д., Кинбер Б. Е. Изв. вузов. Радиофизика, 14, 1219 (1971).
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. Наука, М., 1967.

ՊԱՐԱԲՈԼԱՅԻՆ ՀԱՅԵԼՈՒ ԿԻՉԱԿԵՏԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Է. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Ա. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Քննարկված է պարաբոլային հայելու կիզակետի կայունությունը հայելու մակերևույթի փոքր դեֆորմացիաների և ընկնող ալիքի ուղղության նկատմամբ: Ցույց է տրված, որ հայելու մակերևույթի փոքր դեֆորմացիաների դեպքում կիզակետը տրոհվում է երկու մոտիկ կառուցիկական «կտուցների», իսկ առանցքայինից տարբեր ուղղությամբ ընկնող հարթ ալիքի դեպքում վեր է ածվում պարզ կառուցիկ ճյուղի: Որոշված են կիզակետի գոյության պայմանները:

ON THE STABILITY OF PARABOLOIDAL REFLECTOR FOCUS

E. D. GAZAZIAN, A. A. ASATRYAN

The stability of paraboloidal reflector focus is studied in two different cases: a) when the surface of the reflector has some small deformation, and b) when a plane wave falls on the reflector at a small angle to the axis.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 22, вып. 6, 331—335 (1987)

УДК 541.251

РАСЧЕТ КОНФОРМАЦИИ МОЛЕКУЛ *n*-МЕТОКСИБЕНЗИЛИДЕН-*n'*-*n*-БУТИЛАНИЛИНА И *n*-ЭТОКСИБЕНЗИЛИДЕН-*n'*-*n*-БУТИЛАНИЛИНА

А. Ц. САРКИСЯН, С. М. ЯЙЛОЯН, Х. В. КОТАНДЖЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

(Поступила в редакцию 10 мая 1986 г.)

Проведен расчет конформации молекул *n*-метоксibenзилиден-*n'*-*n*-бутиланилина и *n*-этоксibenзилиден-*n'*-*n*-бутиланилина. Показано, что двугранный угол между плоскостями двух ароматических колец этих молекул составляет соответственно 84° и 86°. Валентные углы при атомах азота и кислорода сильно деформированы. Плоскость углеродов бутильной группы составляет 80° с плоскостью анилинового кольца.