

УДК 530.12

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Р. М. АВАКЯН, О. А. ГРИГОРЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 5 июня 1986 г.)

Получено аналитическое решение аксиально-симметричных уравнений в биметрической теории тяготения в случае модельного уравнения состояния $\rho = aP$.

Любые альтернативные теории гравитации, в том числе и биметрические, отличаются от теории тяготения Эйнштейна только в случае достаточно сильных гравитационных полей. Теоретически интегральные параметры вращающихся объектов можно определить, решая уравнения биметрической теории тяготения в случае аксиально-симметричного распределения масс.

Метод решения таких уравнений в квадратичном по угловой скорости вращения приближении был недавно развит нами [1], причем вне распределения масс найдены аналитические решения. Внутри распределения масс задача решается численно. Ниже рассматривается модельное уравнение состояния $\rho = aP$, где a — некоторая постоянная. Оно позволяет найти аналитические решения уравнений поля при значении параметра $a = \sqrt{12} - 3$.

1. Пусть неподвижный наблюдатель и связанная с ним система отсчета находятся в центре распределения масс. Тогда

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Метрика гравитационного поля, создаваемого стационарным вращением распределения масс, будет аксиально-симметричной, и из общих принципов [2] следует, что

$$ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{2\chi} dr^2 - r^2 [e^{2\psi} (d\theta + \nu dr)^2 + e^{2\chi} \sin^2\theta (d\varphi + \omega dt)^2]. \quad (2)$$

Компоненты метрического тензора являются функциями r и θ и зависят от угловой скорости Ω как от параметра. Полная система уравнений, позволяющая найти функции, описывающие аксиально-симметричное гравитационное поле внутри распределения масс, приведена в работе [1].

Задачу удастся решить методом теории возмущений. Малым параметром разложения функций в ряд служит безразмерная величина $\beta = \Omega^2/8\pi\rho_c$ (ρ_c — плотность вещества в центре конфигурации). Тогда компоненты метрического тензора, давление и плотность можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \Omega) &= \psi(r) + \beta(f^0 + f^2 P_2(\cos \theta)), \\ \Phi(r, \theta, \Omega) &= \Phi(r) + \beta(\varphi^0 + \varphi^2 P_2(\cos \theta)), \\ \frac{1}{2}(\mu + \alpha) &= \psi(r) + \beta(u^0 + u^2 P_2), \\ \frac{1}{2}(\mu - \alpha) &= \beta \chi(r) P_2^{(2)},\end{aligned}\quad (3)$$

$$\omega(r, \theta, \Omega) = \sqrt{\beta} q(r) P_1^{(1)};$$

$$P = P_0(r) + \beta(P^0 + P^2 P_2(\cos \theta)), \quad (4)$$

$$\rho = a[P_0(r) + \beta(P^0 + P^2 P_2(\cos \theta))],$$

где величины с индексом соответствуют статически-сферическому распределению масс.

В работе [3] показано, что в случае сферического распределения масс задача сводится к интегрированию системы двух уравнений

$$\frac{dF}{dx} = \frac{m}{x^2}, \quad \frac{dm}{dx} = x^2 \quad (5)$$

с начальными условиями $m = F = 0$. Здесь $F(x) = \Phi(x) - \Phi_c$, $x = r/b$, $m = M/b$, $b = [4\pi P_c(a+3)]^{-1/2} e^{-(\Phi_c + 3/4)/2}$. Индексом „с“ отмечены значения соответствующих величин в центре конфигурации. Что касается остальных функций, то

$$m_1 = \frac{a-1}{a+3} m, \quad \chi(x) = \psi(x) - \psi_c = -\frac{a-1}{a+3} F(x), \quad (6)$$

$$P(x) = P_c e^{-(a+1)F}.$$

Из системы (5) следует, что $m = x^3/3$, $F' = x/3$ и $F = x^2/6$. Условия непрерывности компоненты метрического тензора g_{00} и ее первой производной на поверхности сферы дают $\Phi_c = -x_0^2/2$ и $\psi_c = 0,1547$.

Тогда $b = 0,1516 \cdot e^{0,366 x_0^2 / \sqrt{P_c}}$ и интегральные параметры конфигураций следующие:

$$M = bx^3/3, \quad M_1 = -0,1547 M, \quad R = bx_0.$$

Отметим, что в случае выбранного уравнения состояния $\rho = aP = 0,464 \cdot P = 0,464 \cdot P_c e^{-0,444 x^2}$ плотность и давление становятся равными нулю на бесконечности. Поэтому если мы хотим говорить о параметрах конфигурации, необходимо искусственно задать ее границу R .

2. В приближении Ω определяется компонента g_{00} метрического тензора. Соответствующее уравнение получено в [4]:

$$\frac{d^2 Q(x)}{dx^2} + \left(\frac{4}{x} - ax \right) \frac{dQ}{dx} - 4aQ = 3a,$$

где

$$Q(x) = q(x)/\sqrt{8\pi P_c}, \quad a = 4(a+1)/3(a+3) = 0,5635.$$

Не расходящееся в центре решение имеет вид

$$Q_{in} = AF\left(2, \frac{5}{2}, z\right) - \frac{3}{4}, \quad z = \frac{\alpha x^2}{2}, \quad (7)$$

где $F(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Вне распределения масс имеем

$$Q_{out} = \frac{C}{x^3} F\left(2, 4, -\frac{3mx}{x}\right), \quad (8)$$

где постоянная C , определяемая вместе с A из условия непрерывности g_{0z} и ее первой производной на границе сферической конфигурации, известным образом связана с моментом инерции конфигурации [5]

$$I/I_0 = \int_0^{z_0} e^{-z} z^{3/2} \left[AF\left(2, \frac{5}{2}, z\right) + \frac{1}{4} \right] dz, \quad (9)$$

где

$$I_0 = \sqrt{2} \left(\frac{3}{16\pi P_c (\alpha + 1)} \right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha+13}{\alpha+3} \varphi_c}.$$

Имея в виду последнее соотношение, получаем

$$A = \frac{3}{4} \frac{z_0 (\operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} z_0) - \operatorname{sh} z_0}{x},$$

$$C = \frac{2}{5} (z_0 x_0)^3 \frac{e^{z_0} F\left(3, \frac{7}{2}, z_0\right)}{x},$$

где

$$x = [z_0 (\operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} z_0) - \operatorname{sh} z_0] F\left(2, \frac{5}{2}, z_0\right) - \frac{8}{5} (z_0 \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} z_0) F\left(3, \frac{7}{2}, z_0\right).$$

Во втором приближении по угловой скорости задача сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$\Delta_0 X + \frac{2(\alpha-3)}{\alpha+3} X - \frac{2(\alpha+1)(\alpha-3)}{\alpha+3} \varphi^0 = - \frac{(\alpha-3)(\alpha+1)}{\alpha+3} D(x), \quad (11)$$

$$\Delta_0 \varphi^0 + (\alpha+1) \varphi^0 - X = \frac{2}{3} G(x) + \frac{1}{3} H(x) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+7)}{2(\alpha+3)} D(x), \quad (12)$$

$$\Delta_0 (B + 6X) = \frac{2}{3} G(x) + \frac{1}{3} H(x) + 2 \frac{\alpha+1}{\alpha+3} D(x), \quad (13)$$

$$\Delta_2 A + 2 \frac{\alpha-3}{\alpha+3} A - 2 \frac{(\alpha+1)(\alpha-3)}{\alpha+3} \varphi^2 = \frac{(\alpha+1)(\alpha-3)}{\alpha+3} D(x), \quad (14)$$

$$\Delta_2 \varphi^2 - A + (\alpha+1) \varphi^2 = \frac{1}{3} G(x) - \frac{1}{3} H(x) - \frac{(\alpha+1)(\alpha+7)}{2(\alpha+3)} D(x), \quad (15)$$

$$\Delta_2(B-6\chi) = \frac{2}{3} G(x) - \frac{2}{3} H(x) - 4 \frac{a+1}{a+3} D(x). \quad (16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$X = \varphi^0 + f^0 + 2u^0, \quad A = \varphi^2 + f^2 + 2u^2, \quad B = f^2 - u^2,$$

$$D(x) = K(x) = \frac{2}{3} x^2 e^{-3xF} (Q+1)^2, \quad G(x) = e^{-3xF} Q^2,$$

$$H(x) = x^2 G(x) \left(\frac{Q_1}{Q} + \frac{1}{x} \right)^2, \quad \Delta_l = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right) - \frac{l(l+1)}{x^2}.$$

Отметим, что все шесть неизвестных функций переобозначены одинаковым образом. Например, функция X заменена на $\frac{2a}{a+3} e^{-\frac{2a+10}{a+3} F} X$. Заметим далее, что не все из приведенных функций независимы; между ними имеются определенные связи. Действительно, из (11)–(13) следует, что

$$X = \frac{2(3-a)}{a+3} (\varphi^0 - B - 6\chi), \quad (17)$$

а из (14)–(16) —

$$A = \frac{2(3-a)}{a+3} \left(\varphi^2 - \frac{B-6\chi}{2} \right). \quad (18)$$

В уравнениях (13) и (16) перейдем к переменной z и выполним интегрирование. Тогда

$$B + 6\chi = V_1(z) + c, \quad (19)$$

$$B - 6\chi = V_2(z) + Ez, \quad (20)$$

где

$$V_1(z) = \frac{1}{2z} \int_0^z \frac{dz'}{z'^{3/2}} \int_0^{z'} V \bar{z} u_1(z) dz, \quad (21)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2z^{3/2}} \int_0^z z'^{3/2} dz' \int_0^{z'} u_2(z) dz,$$

а $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — правые части соответствующих уравнений.

Далее, подставляя φ^0 из (17) в (11) и φ^2 из (18) в (14), получаем

$$X(z) = \tilde{X}(z) - \frac{(a+1)^2}{6z} cz + \frac{(a+1)^2}{4z} C_1, \quad (22)$$

$$A(z) = \tilde{A}(z) + \frac{2(a+1)^2}{7z} E_2 + \frac{(a+1)^2}{10z} E_1 z, \quad (23)$$

причем

$$\begin{aligned}\bar{X}(z) &= \frac{(a+1)^2}{4z} \int_0^z \frac{dz'}{z'^{3/2}} \int_0^{z'} \sqrt{z} [D(z) - V_1(z)] dz, \\ \bar{A}(z) &= \frac{(a+1)^2}{4az^{3/2}} \int_0^z z'^{2/3} dz' \int_0^{z'} \frac{D(z) + V_2(z)}{z} dz.\end{aligned}\quad (24)$$

Оставшиеся две функции определяются сразу:

$$\begin{aligned}\varphi^0(z) &= \frac{X}{a+1} + V_1(z) + c, \\ \varphi^2(z) &= -\frac{A}{a+1} + V_2(z) + Ez.\end{aligned}$$

Между постоянными, входящими во внешнее решение (см. [1]), имеются определенные связи, следующие из (17) и (18):

$$\begin{aligned}b_0 &= (a+1)(a_0 - b_1), \\ b_2 &= (a+1)(6a_0 - a_2).\end{aligned}$$

Интегралы (21) и (24) в принципе можно вычислить точно или оценить, используя формулы, приведенные в [6] и [8]. Для постоянных, входящих в решение внутри и вне распределения масс, получаем

$$\begin{aligned}b_1 &= f'_1(z_0) - V'_1(z_0), \quad c = f_1(z_0) - V_1(z_0) - z_0 b_1, \\ a_0 &= \frac{1}{24z_0^3} [V_2 - f_2 + z_0(V'_2 - f'_2)], \quad E = \frac{1}{2z_0} [3(f_2 - V_2) - z_0(f'_2 - V'_2)], \\ b_0 &= \frac{(a+1)^2}{6a} c - \bar{X}'(z_0), \quad C_1 = \frac{4z}{(a+1)^2} (\bar{X}'(z_0) z_0 - \bar{X}(z_0)), \\ b_2 &= \frac{1}{2z_0^3} \left[\bar{A}(z_0) - z_0 \bar{A}'(z_0) - \frac{2(a+1)}{7a} E z_0^2 \right], \\ E_1 &= -\frac{5a}{(a+1)^2 z_0} \left[3\bar{A}(z_0) - \bar{A}'(z_0) z_0 + \frac{3(a+1)^2}{7a} E z_0^2 \right].\end{aligned}\quad (25)$$

Знание этих постоянных позволит нам определить интегральные характеристики: массы M , M_1 , квадрупольные моменты, полярный и экваториальный полуоси и форму вращающейся конфигурации.

Согласно [7] форма конфигурации определяется величинами d^l , которые в используемых нами единицах имеют вид

$$D^l = \frac{d^l}{b} = \frac{3}{x_0} \left[\varphi^l(x_0) - \frac{K(x_0)}{2} (\delta_{0l} - \delta_{2l}) \right].$$



ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян О. А., Чубарян Э. В. *Астрофизика*, 23, 177 (1985).
2. Avakian R. M. et al. *Ap. and Sp. Sci.*, 68, 347 (1980).
3. Авакян Р. М., Саркисян А. В., Чубарян Э. В. *Ученые записки ЕГУ*, № 1 (164), 69 (1987).
4. Чубарян Э. В., Саркисян А. В. *Астрофизика*, 20, 585 (1984).
5. Авакян Р. М., Чубарян Э. В. Тезисы докладов II Всесоюзного симпозиума «Движение тел в релятивистской теории гравитации». Вильнюс, 1986, с. 12.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Изд. физ.-мат. лит., М., 1962.
7. Седракан Д. М., Чубарян Э. В. *Астрофизика*, 4, 551 (1968).
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*, т. 1. Изд. Наука, М., 1965.

**ՔԻՄԵՏՐԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԱՌԱՆՑՔԱ-ՀԱՄԱԶԱՓ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Ռ. Մ. ԱՎԱԿՅԱՆ, Հ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Է. Վ. ՉՈՒՐԱՐՅԱՆ

*Վիճակի $\rho = aP$ մոդելային հավասարման լուծումը ձգողության բիմետրիկ տեսության
անհամապատասխանությունների և անհամապատասխանության հավասարումների անալիտիկ լուծումը:*

ON THE ANALYTICAL SOLUTION OF AXIALLY SYMMETRIC EQUATIONS IN THE BIMETRIC THEORY

R. M. AVAKIAN, H. A. GRIGORIAN, E. V. CHUBARIAN

An analytical solution of axially symmetric equations in the bimetric theory of gravitation is obtained for the $\rho = aP$ equation of state.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 22, вып. 5, 258—262 (1987)

УДК 621.315.592

ЭФФЕКТ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Г. М. АРУТЮНЯН, Г. А. ЕРИЦЯН

НИИ физики конденсированных сред ЕГУ

(Поступила в редакцию 2 января 1986 г.)

Рассмотрены особенности эффекта самовоздействия интенсивного электромагнитного излучения в полупроводниках, когда кроме дипольно разрешенных межзонных переходов учитывается также влияние внутризонного движения носителей в зонах.

Нелинейные оптические эффекты, связанные с самовоздействием интенсивных электромагнитных волн в различных средах, исследуются довольно давно [1]. Эффект самовоздействия связан с зависимостью ди-