Изв. АН Армянской ССР. Физика, т. 22, вып. 5, 241—246 (1987)

УДК 535.14

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ МАТРИЦА СИСТЕМЫ ДВУХ ФОТОНОВ

В. Е. МКРТЧЯН, В. О. ЧАЛТЫКЯН

Институт физических исследований АН АрмССР

(Поступила в редакцию 10 августа 1986 г.)

Проведены классификация и анализ всех возможных поляризационных состояний системы двух фотонов. Дано процедурное определение этих состояний.

1. Введение

Система двух фотонов впервые была рассмотрена Л. Д. Ландау [1] в 1948 г. В этой работе произведена классификация по четности и моменту возможных состояний двух фотонов с равной нулю суммой импульсов и, как следствие этой классификации, приведены правила отбора для двухфотонного распада позитрония. Позднее такая же система фотонов была рассмотрена Ч. Янгом [2] для установления из общих соображений правил отбора при двухфотонном распаде мезонов. После этих работ был рассмотрен ряд конкретных задач по изучению поляризационно-угловых характеристик фотонов при аннигиляции частиц и испускании атомными ядрами [3—5].

Поляризационные свойства двухфотонного оптического излучения стали изучаться с середины шестидесятых годов [6]. В работе [7] теоретически изучены свойства поляризации двух фотонов, испускаемых в атомном каскаде. Интерес к подобным исследованиям обусловлен тем, что они, с одной стороны, дают возможность проверки фундаментальных принципов квантовой теории [8, 9] и, с другой стороны, позволяют наблюдать тонкие квантовые эффекты и измерять атомные константы [10]. Однако в теоретическом описании системы двух фотонов отсутствует полный анализ всевозможных поляризационных состояний системы и процедур их экспериментального наблюдения, подобный проведенному в [11] для одного фотона.

В разделе 2 настоящей работы анализируются состояния поляризации системы двух фотонов с помощью формализма поляризационной матрицы плотности [12, 13].

2. Поляризационная матрица плотности двух фотонов

Наиболее общий вид нормированной поляризационной матрицы системы двух фотонов с импульсами $\mathbf{k}_a$ и $\mathbf{k}_b$ есть

$$\hat{\rho}^{(a,b)} = \frac{1}{4}\Big\{\hat{I}^{(a)}\otimes\hat{I}^{(b)} + \xi^{(a)}\hat{\sigma}^{(a)}\otimes\hat{I}^{(b)} + \\ + \hat{I}^{(a)}\otimes\xi^{(b)}\hat{\sigma}^{(b)} + \sum_{i,j}\zeta_{ij}\,\hat{\sigma}_i^{(a)}\otimes\hat{\sigma}_j^{(b)}\Big\}, \qquad (1)$$

где $\widehat{I}^{(a),(b)}$ и $\widehat{\sigma}^{(a),(b)}$ — двухрядная единичная матрица и матрицы Паули, действующие в пространстве поляризаций фотонов a и b, а величины $\xi^{(a),(b)}$, ζ_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ являются функциями импульсов фотонов $\mathbf{k}_{a,b}$ и параметров излучающей системы. Знак $\otimes$ означает прямое произведение матриц; при этом всюду в прямых произведениях условимся слева ставить матрицу, относящуюся к фотону a.

Условие эрмитовости матрицы (1) приводит к вещественности параметров $\xi^{(a),(b)}$, ζ_{ij}, а условие симметричности относительно перестановки фотонов сводится к соотношениям

$$\begin{aligned} \xi^{(b)} &= \xi^{(a)}\,(\mathbf{k}_a \rightleftarrows \mathbf{k}_b), \\ \zeta_{ji} &= \zeta_{ij}\,(\mathbf{k}_a \rightleftarrows \mathbf{k}_b). \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, матрица $\widehat{\rho}^{(a,b)}$ определяется в общем случае пятнадцатью вещественными параметрами (что следует также из размерности матрицы) $\xi_i^{(a)}$, $\xi_i^{(b)}$, ζ_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$. След матрицы (1) по состояниям поляризации фотона b (или a) равен

$$\mathrm{Sp}_{b,a}\,\widehat{\rho}^{(a,b)} = \widehat{\rho}^{(a),(b)}, \tag{3}$$

где

$$\widehat{\rho}^{(a),(b)} = \frac{1}{2}\left\{\widehat{I}^{(a),(b)} + \xi^{(a),(b)}\,\widehat{\sigma}^{(a),(b)}\right\} \tag{4}$$

есть обычная матрица Стокса фотона a (или b). Отсюда следует, что векторы $\xi^{(a),(b)}$ являются векторами Стокса соответствующих фотонов. Параметры ζ_{ij} описывают корреляцию поляризаций двух фотонов. Если поляризации фотонов независимы, то ζ_{ij} факторизуются, т. е. при условии

$$\widehat{\rho}^{(a,b)} = \widehat{\rho}^{(a)} \otimes \widehat{\rho}^{(b)}$$

имеем

$$\zeta_{ij} = \xi_i^{(a)}\,\xi_j^{(b)}. \tag{5}$$

Вероятность детектирования фотонов a и b в состояниях с векторами Стокса $\xi^{(A)}$ и $\xi^{(B)}$ соответственно $(|\xi^{(A),(B)}|=1)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} w\,(\xi^{(A)}, \xi^{(B)}) &= \mathrm{Sp}\left[\widehat{\rho}^{(A)} \otimes \widehat{\rho}^{(B)}\,\widehat{\rho}^{(a,b)}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left\{1 + \xi^{(A)}\xi^{(a)} + \xi^{(B)}\xi^{(b)} + \sum_{ij}\zeta_{ij}\,\xi_i^{(A)}\,\xi_j^{(B)}\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\widehat{\rho}^{(A),(B)}$ — матрицы Стокса анализаторов, определяемые формулами (4) с заменой $a, b \to A, B$. Отсюда следует, что параметры ζ_{ij} можно найти, проделав девять экспериментов с двумя анализаторами для измерения вероятности (6):

$$\zeta_{ij} = 4w\,(\xi_i^{(A)}=1,\ \xi_j^{(B)}=1) - 1 - \xi_i^{(a)} - \xi_j^{(b)}; \tag{7}$$

при этом величины $\xi_i^{(a)}$, $\xi_j^{(b)}$ определяются из шести экспериментов с одним анализатором, помещаемым перед одним, затем перед другим детектором:

$$\xi_i^{(a),(b)} = 2w\,(\xi_i^{(A),(B)} = 1) - 1.$$

Можно также измерять все параметры только из экспериментов с двумя анализаторами, если воспользоваться очевидными равенствами, следующими из (6):

$$\xi_i^{(a),(b)} = 2\,\{w\,(\xi_i^{(A),(B)} = 1,\ \xi^{(B),(A)}) + w\,(\xi_i^{(A),(B)} = 1,\ -\xi^{(B),(A)})\} - 1,$$

$$\zeta_{ij} = 2\,\{w\,(\xi_i^{(A)} = 1,\ \xi_j^{(B)} = 1) + w\,(\xi_i^{(A)} = -1,\ \xi_j^{(B)} = -1)\} - 1.$$

Отметим, что условие неотрицательности вероятности (6) при произвольной «ориентации» анализаторов (здесь и далее, когда речь идет об «ориентации», имеется в виду также и тип анализатора, т. е. совокупность его параметров Стокса $\xi_i^{(A),(B)}$, $i = 1, 2, 3$) приводит к тому, что величины ζ_{ij}, как и параметры $\xi_i^{(a),(b)}$, удовлетворяют условиям $|\zeta_{ij}| \leqslant 1$; кроме того, имеет место неравенство $|\xi_i^{(a)} + \xi_j^{(b)}| - 1 \leqslant \zeta_{ij} \leqslant 1 - |\xi_i^{(a)} - \xi_j^{(b)}|$. Условие $\mathrm{Sp}\,\{\hat{\rho}^{(a,b)}\}^2 \leqslant 1$ приводит еще к одному неравенству, которому должны удовлетворять поляризационные параметры пары фотонов:

$$|\xi^{(a)}|^2 + |\xi^{(b)}|^2 + \sum_{i,\,j} \zeta_{ij}^2 \leqslant 3. \tag{8}$$

Знак равенства в (8) имеет место в том случае, когда система фотонов находится в чистом поляризационном состоянии. Действительно, чистое состояние определяется соотношением $\{\hat{\rho}^{(a,b)}\}^2 = \hat{\rho}^{(a,b)}$, которое сводится к следующей системе равенств:

$$\left.\begin{aligned} &|\xi^{(a)}|^2 + |\xi^{(b)}|^2 + \sum_{i,\,j} \zeta_{ij}^2 = 3, \\ &\xi_i^{(a)}\,\xi_j^{(b)} - \zeta_{ij} - [\zeta_{ij}] = 0, \\ &\xi_i^{(a)} - \sum_j \zeta_{ij}\,\xi_j^{(b)} = 0, \\ &\xi_i^{(b)} - \sum_j \zeta_{ji}\,\xi_j^{(a)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где через $[\zeta_{ij}]$ обозначено алгебраическое дополнение элемента ζ_{ij} матрицы $\hat{\zeta}$.

Рассмотрим систему (9) более подробно. Физический смысл второго равенства (9) очевиден из соотношения

$$w\,(\xi^{(A)},\ \xi^{(B)}) - w\,(\xi^{(A)})\,w\,(\xi^{(B)}) = \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\zeta_{ij} - \xi_i^{(a)}\,\xi_j^{(b)})\,\xi_i^{(A)}\,\xi_j^{(B)} = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}[\zeta_{ij}]\,\xi_i^{(A)}\,\xi_j^{(B)},$$

откуда следует смысл алгебраических дополнений элементов матрицы $\hat{\zeta}$:

$$[\zeta_{ij}] = -4\,[w(\xi_i^{(A)}=1,\ \xi_j^{(B)}=1) - w(\xi_i^{(A)}=1)\,w(\xi_j^{(B)}=1)].$$

Из последних двух равенств (9) при $i = 1, 2, 3$ имеем

$$|\boldsymbol{\xi}^{(a)}|^2 = |\boldsymbol{\xi}^{(b)}|^2, \tag{10}$$

т. е. в чистом состоянии системы векторы Стокса отдельных фотонов равны по модулю. Один предельный случай соотношения (10) достигается при $|\boldsymbol{\xi}^{(a)}|^2 = |\boldsymbol{\xi}^{(b)}|^2 = 1$, т. е. когда каждый фотон в отдельности полностью поляризован. При этом, очевидно, $\zeta_{ij} = \xi_i^{(a)}\xi_j^{(b)}$, и состояние пары фотонов определяется четырьмя независимыми параметрами. Это единственный случай, когда вероятность (6) может достигать значения, равного единице, поскольку лишь в этом случае можно избежать редукции состояний отдельных фотонов, ориентируя анализаторы так, что $\boldsymbol{\xi}^{(A)} = \boldsymbol{\xi}^{(a)}$ и $\boldsymbol{\xi}^{(B)} = \boldsymbol{\xi}^{(b)}$. Другой предельный случай — $\boldsymbol{\xi}^{(a)} = \boldsymbol{\xi}^{(b)} = 0$, когда каждый из фотонов полностью неполяризован. В этом случае из второго равенства (9) имеем $\zeta_{ij} = -[\zeta_{ij}]$, т. е. матрица $\hat{\zeta}$ является ортогональной с детерминантом, равным -1, и состояние пары фотонов определяется тремя независимыми параметрами. Максимально возможное значение вероятности (6) в этом случае равно 1/2. Для частного случая такого состояния, когда $\zeta_{ij} = -\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера), вид матрицы $\hat{\rho}^{(a,b)}$ приведен в [12], а волновая функция выписана в [2].

В общем случае анализ системы равенств (9) показывает, что лишь девять из них независимы. Это означает, что чистое состояние системы двух фотонов определяется в общем случае шестью независимыми величинами. Эти шесть величин можно ввести, представляя чистое состояние пары фотонов в виде

$$|\psi\rangle = c\,|\mathbf{e}_1^{(a)},\ \mathbf{e}_1^{(b)}\rangle + c_1 \exp(i\varphi_1)\,|\mathbf{e}_1^{(a)},\ \mathbf{e}_2^{(b)}\rangle + \\ + c_2 \exp(i\varphi_2)\,|\mathbf{e}_2^{(a)},\ \mathbf{e}_1^{(b)}\rangle + c_3 \exp(i\varphi_3)\,|\mathbf{e}_2^{(a)},\ \mathbf{e}_2^{(b)}\rangle, \tag{11}$$

где $|\mathbf{e}_\alpha^{(a)}, \mathbf{e}_\beta^{(b)}\rangle$ ($\alpha, \beta = 1,2$) есть состояние, в котором фотоны a и b поляризованы вдоль ортов $\mathbf{e}_\alpha^{(a)}$ и $\mathbf{e}_\beta^{(b)}$ соответственно (каждый в своем пространстве поляризаций), а вещественные величины c, c_i ($i=1, 2, 3$) связаны условием $c^2 + \sum_i c_i^2 = 1$. Тогда параметры $\xi_i^{(a)}$, $\xi_i^{(b)}$, ζ_{ij} можно выразить через c, c_i, φ_i ($i = 1, 2, 3$) с помощью соотношения $\hat{\rho}^{(a,b)} = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$\begin{aligned}
\xi_1^{(a)} &= 2\,(cc_2 \cos\varphi_2 + c_1c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)),\\
\xi_2^{(a)} &= 2\,(cc_2 \sin\varphi_2 - c_1c_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)),\\
\xi_3^{(a)} &= 1 - 2\,(c_2^2 + c_3^2),\\
\zeta_{11,22} &= 2\,(c_1c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \pm cc_3 \cos\varphi_3),\\
\zeta_{33} &= 1 - 2\,(c_1^2 + c_2^2),\\
\zeta_{12,23} &= 2\,(cc_{3,2} \sin\varphi_{3,2} + c_1c_{2,3} \sin(\varphi_1 - \varphi_{2,3})),\\
\zeta_{13} &= 2\,(cc_2 \cos\varphi_2 - c_1c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3));
\end{aligned} \tag{12}$$

параметры $\xi_i^{(b)}$ получаются из $\xi_i^{(a)}$, а ζ_{ij} — из ζ_{ji} с помощью очевидных (см. (2)) замен $c_1, \varphi_1 \rightleftarrows c_2, \varphi_2$.

Отметим, что состояние (11) можно представить как суперпозицию собственных состояний оператора суммарной спиральности фотонов a и b: $\hat{\Lambda} = \hat{\sigma}_2^{(a)} \otimes \hat{I}^{(b)} + \hat{I}^{(a)} \otimes \hat{\sigma}_2^{(b)}$, соответствующих собственным значениям $\Lambda = 0$; 2. Вычисления показывают, что при значениях суммарной спиральности $\Lambda = \pm 2$ отличные от нуля параметры (12) равны $\xi_2^{(a)} = \xi_2^{(b)} = \pm \zeta_{22} = \pm 1$, что соответствует нескоррелированным циркулярно-поляризованным фотонам. При $\Lambda = 0$ отличные от нуля параметры (12) равны

$$\xi_2^{(a)} = -\xi_2^{(b)} = -4cc_1 \sin\varphi_1, \quad \zeta_{22} = -1,$$
$$\zeta_{11} = \zeta_{33} = 2(c^2 - c_1^2), \quad \zeta_{13} = -\zeta_{31} = -4cc_1 \cos\varphi_1 \quad (c^2 + c_1^2 = 1/2), \tag{13}$$

т. е. в чистом состоянии с нулевой суммарной спиральностью поляризации фотонов скоррелированы.

Рассмотрим теперь процедуру определения чистого состояния пары фотонов путем измерения вероятности (6). Для этого выпишем условие обращения вероятности в нуль. Нетрудно убедиться, что выражение (6) можно обратить в нуль, если для произвольного $\xi^{(B)}$ можно найти такое $\xi^{(A)}$, при котором выполняется неравенство

$$(1 + \xi^{(A)} \xi^{(a)})^2 \leqslant \sum_j (\xi_j^{(b)} + \sum_i \zeta_{ij} \xi_i^{(A)})^2. \tag{14}$$

С помощью (12) можно показать, что в случае чистого состояния пары в выражении (14) имеет место знак равенства при произвольном $\xi^{(A)}$, и тогда при выборе $\xi^{(B)}$ согласно формуле

$$\xi_i^{(B)} = -(\xi_i^{(b)} + \sum_j \zeta_{ji} \xi_j^{(A)})/(1 + \xi^{(A)} \xi^{(a)}) \tag{15}$$

имеем $w(\xi^{(A)}, \xi^{(B)}) = 0$. Отсюда следует процедурное определение чистого состояния: система двух фотонов находится в чистом поляризационном состоянии, если при произвольной ориентации одного анализатора можно найти такую ориентацию второго, при которой вероятность детектирования пары обращается в нуль. Этот результат легко понять, проводя рассуждения Эйнштейна, Подольского, Розена [14] для случая поляризационных измерений. Действительно, в результате редукции состояния фотона a при измерении его поляризации (произвольно ориентированным анализатором) фотон b переходит в чистое состояние (если пара находится в чистом состоянии), а значит можно найти такую ориентацию анализатора B, при которой вероятность детектирования пары зануляется.

Из анализа поведения выражения (6) при изменении знака вектора Стокса одного или другого анализатора (или обоих вместе) можно сделать также определенные выводы относительно состояния поляризации отдельных фотонов в чистом состоянии пары. Так, если при некоторых $\xi^{(A)}$, $\xi^{(B)}$ величина $w(\xi^{(A)}, \xi^{(B)})$ обращается в нуль и при этом обращаются в нуль также $w(\xi^{(A)}, -\xi^{(B)})$ и $w(-\xi^{(A)}, \xi^{(B)})$, то имеем $w(-\xi^{(A)},$

$-\xi^{(B)}) = 1$, откуда $\xi^{(A)}\xi^{(a)} = \xi^{(B)}\xi^{(b)} = -\sum_{i,j}\zeta_{ij}\xi_i^{(A)}\xi_j^{(B)} = -1$, т. е. каждый из фотонов полностью поляризован: $\xi^{(a)} = -\xi^{(A)}$, $\xi^{(b)} = -\xi^{(B)}$. В случае же, когда $w(\xi^{(A)}, \xi^{(B)}) = w(-\xi^{(A)}, -\xi^{(B)}) = 0$, имеем $1 + \sum_{i,j}\zeta_{ij}\xi_i^{(A)}\xi_j^{(B)} = 0$, $\xi^{(a)}\xi^{(A)} = -\xi^{(b)}\xi^{(B)}$. Поскольку последние соотношения должны выполняться при произвольном $\xi^{(B)}$, то $\xi^{(a)} = \xi^{(b)} = 0$, ζ — ортогональная матрица, т. е. каждый из фотонов полностью неполяризован.

В общем случае смешанного (частично поляризованного) состояния пары фотонов вероятность детектирования, вообще говоря, невозможно обратить в нуль. Однако в некоторых случаях смешанных состояний это можно сделать, но при определенных значениях параметров Стокса обоих анализаторов, т. е. при определенной ориентации каждого из них. Пример таких состояний будет рассмотрен в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* ДАН СССР, 60, 207 (1948).
2. *Yang C. N.* Phys. Rev., 77, 242 (1950).
3. *McMaster W. H.* Nuovo Cimento, 7, 395 (1960).
4. *Гольдфарб Л.* В сб. «Ядерные реакции», т. 1. Госатомиздат, М., 1962.
5. *Ферпюсон Д.* Методы угловых корреляций в гамма-спектроскопии. Атомиздат, М., 1969.
6. *Kocher C. A., Commins E. D.* Phys. Rev. Lett., 18, 575 (1967).
7. *Fry E. S.* Phys. Rev., A8, 1219 (1973).
8. *Clauser J. F.* et al. Phys. Rev. Lett., 23, 880 (1969).
9. *Freedman S. J., Clauser J. F.* Phys. Rev. Lett., 28, 938 (1972).
10. *Aspect A.* et al. Opt. Comm., 49, 429 (1984)
11. *Fano U.* Phys. Rev., 93, 121 (1954).
12. *Fano U.* Rev. Mod. Phys., 29, 74 (1957).
13. *Scarl L.* Phys. Rev., A26, 3423 (1982).
14. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов, т. 3. Изд. Наука, М., 1966.

ԵՐԿՖՈՏՈՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԲԵՎԵՌԱՑՄԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՆ

Վ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Վ. Հ. ՉԱԼՏԻԿՅԱՆ

Հետազոտված են երկֆոտոնային համակարգի բոլոր հնարավոր բևեռացման վիճակները։ Տրված են այդ վիճակների պրոցեդուրային սահմանումները։

POLARIZATION MATRIX OF TWO-PHOTON SYSTEM

V. E. MKRTCHYAN, V. O. CHALTYKYAN

A classification and analysis of all the possible polarization states of a two-photon system are carried out. The procedure definition of these states is given.