

ՅՈՒ. Գ. ՇԱՀՆԱԶԱՐՅԱՆ

Քվանտային բրոմոդինամիկայի շրջանակներում հետազոտված է ծանր քվարկների զանգվածի հաշվառման ազդեցությունը $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ եռափունջ պրոցեսի կտրվածքի՝ ըստ T (առավել մեծ էներգիա ունեցող պարտոնի իմպուլս) և x_{\perp} (մյուս երկու պարտոնների T առանցքի նկատմամբ լայնակի իմպուլս) փոփոխականների բաշխման վրա: Ցույց է տրված, որ ստացվող արդյունքները էպսիս կախված են քվարկի զանգվածից: Զանգվածի հաշվառումը բերում է ոչ միայն x_{\perp} -ի փոփոխման տիրույթի զգալի ընդլայնմանը և այդ տիրույթի տեղաշարժմանը դեպի x_{\perp} -ի փոքր արժեքները, այլ և $d^2\sigma/dTdx_{\perp}$ կտրվածքի x_{\perp} -կախվածությունը նկարագրող կորերի վրա կառուցվածքների առաջացմանը:

TRANSVERSE MOMENTUM DISTRIBUTION OF $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ PROCESS CROSS SECTION FOR HEAVY QUARKS

YU. G. SHAKHAZARYAN

It was shown that the allowance for heavy quarks mass strongly affected the theory predictions for the distribution of $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ process cross section in the value of thrust, T , and in the momentum x_{\perp} of every other of two partons transverse to the T axis in this process. The consideration of the quark mass results in notable widening of variation range of x_{\perp} as compared with the massless case and in the shift of this range to smaller values of x_{\perp} , and also leads to a rise of structures in curves describing the x_{\perp} -dependence of $d^2\sigma/dTdx_{\perp}$.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 22, вып. 4, 191—197 (1987)

УДК 523.64

ВЫСОКОТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОЛНОГО ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ЧАСТОТАМ

Ր. Գ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ր. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Խ. Վ. ԿՕՏԱՆԺՅԱՆ

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

Մ. Ա. ՄՆԱՇԱԿԱՆՅԱՆ

Бюраканская астрофизическая обсерватория АН АрмССР

(Поступила в редакцию 5 мая 1986 г.)

Найдены приближенные высокоточные аналитические решения наиболее общей по постановке задачи о переносе некогерентного излучения в трехмерной среде конечной оптической толщины для модели полного перераспределения по частотам.

Для однородных полубесконечных сред и простейших моделей элементарного акта рассеяния — монохроматического рассеяния и полного перераспределения по частотам (в изотропном случае) — решения задач о переносе излучения известны в замкнутом аналитическом виде [1—4]. Что касается среды конечной оптической толщины, то за исключением случая монохроматического рассеяния в одномерной среде найти для нее точные аналитические решения не удастся. Поэтому представляется целесообразным получение для слоя конечной толщины приближенных аналитических решений, обладающих высокой точностью (см., например, [5]).

Настоящая работа посвящена выводу аналитических решений задачи о некогерентном рассеянии для модели полного перераспределения по частотам в трехмерной среде. Эта модель широко используется не только в астрофизических, но и во многих физических приложениях, например при исследовании процессов переноса мёссбауэровского излучения в твердых телах [6].

Отправными соотношениями для данного исследования служат уравнения метода сведения [7, 8], устанавливающие связь между решением произвольной задачи о слое конечной толщины с решением аналогичной задачи для полубесконечной среды. Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 J^+(z) &= j^+(z) + \int_0^{\infty} Z(\tau_0, z, z') j^-(z') dz', \\
 J^-(z) &= j^-(z) + \int_0^{\infty} Z(\tau_0, z, z') j^+(z') dz'.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь $j^{\pm}(z)$ — плотности вероятности выхода кванта через правую или левую границу слоя толщиной τ_0 при произвольном распределении в нем летящих и поглощенных квантов, $J^{\pm}(z)$ — аналогичные величины для полубесконечной среды. Другой характеристикой полубесконечной среды является $Z(\tau, z, z')$ — вероятность того, что квант, летящий на глубине τ полубесконечной среды в направлении в глубь среды со значением переменной z' , выйдет из среды со значением z . Она определяется выражением

$$Z(\tau, z, z') = \frac{\lambda}{2} z \frac{F(\tau, z) + \tilde{F}(\tau, z')}{z + z'} G(z') \varphi(z),
 \tag{2}$$

где функции F и \tilde{F} представляются в виде

$$F(\tau, z) = \frac{P(\tau, z)}{\frac{\lambda}{2} \varphi(z)},
 \tag{3}$$

$$\tilde{F}(\tau, z) = z \varphi(z) \int_0^{\infty} \frac{P(\tau, z')}{z + z'} G(z') dz',$$

а $P(\tau, z)$ — плотность вероятности выхода кванта, поглощенного на глубине τ полубесконечной среды [4], $G(z)$ — „характеристическая“ функция [4], $z = \eta/\alpha(x)$, $\alpha(x)$ — контур линии, x — безразмерная частота относительно центра линии, η — косинус угла вылета, λ — вероятность выживания кванта.

Сложением и вычитанием (1) можно свести к разделенным соотношениям для суммы $s = j^+ + j^-$ и разности $h = j^+ - j^-$:

$$S(z) = s(z) + \int_0^{\infty} Z(\tau_0, z, z') s(z') dz', \quad (4)$$

$$H(z) = h(z) - \int_0^{\infty} Z(\tau_0, z, z') h(z') dz'.$$

Соотношения (4) представляют собой линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода относительно неизвестных $s(z)$ и $h(z)$, выражающие их непосредственно через известные решения S, H и величину Z , которые характеризуют процессы переноса в полубесконечной среде.

После того, как будет найдено «внешнее» решение $j^{\pm}(z)$, нетрудно определить и внутреннее поле $j(\tau, z)$ в данном слое с помощью соотношения

$$J(\tau, z) = j(\tau, z) + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau_0, z, z') j^-(z') dz', \quad (5)$$

где Γ — полная функция Грина полубесконечной среды.

Рассматриваемый подход в определенном смысле представляет собой обратную задачу — нахождение характеристик слоя конечной толщины по аналогичным характеристикам полубесконечной среды. Такой подход дает возможность экспериментально исследовать свойства оптически толстого слоя и по ним уже определить свойства тонких слоев. Соотношение (5) выражает решение другой обратной задачи — определение внутренних полей в слое по выходящему из него излучению. С другой стороны, так как по свойствам полубесконечной среды предложенным методом можно определить свойства слоя любой толщины и, в частности, бесконечно тонкого слоя, то это означает, что можно найти и характеристики элементарного акта рассеяния.

Займемся выводом искомых высокоточных аналитических решений. Подставляя в уравнения (4) выражение (2) для Z , перепишем их в виде

$$S(z) = s(z) + P(\tau_0, z) s_z + \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{s}_z, \quad (6)$$

$$H(z) = h(z) - P(\tau_0, z) h_z + \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{h}_z,$$

где введены обозначения

$$f_z = z \int_0^{\infty} \frac{f(z') G(z')}{z + z'} dz', \quad \tilde{f}_z = z \int_0^{\infty} \frac{f(z') \tilde{F}(\tau_0, z') G(z')}{z + z'} dz'. \quad (7)$$

Теперь в уравнениях возникли неизвестные «образы» искомым функций типа \tilde{f}_z и \tilde{f}_z . Для их определения надо на исходные уравнения (4) действовать операторами (7). В результате действия второго оператора появляются неизвестные образы новых типов. Попытки замкнуть образующую такими операциями систему уравнений относительно вновь и вновь возникающих образов не достигают цели — иначе удалось бы найти точные аналитические решения задачи о слое конечной толщины. Поэтому ниже мы прибегнем к приближению, позволяющему замкнуть систему уравнений и тем самым найти приближенные, но явные аналитические решения поставленной задачи.

Наше приближение касается величины \tilde{F} и основывается на следующих соображениях. Согласно определению $F(\tau, z)$ есть вероятность того, что квант с частотой x , поглощенный на границе полубесконечной среды, пролетает на глубине τ в направлении η в глубь среды. Величине же $\tilde{F}(\tau, z)$ соответствует обратное направление: это есть вероятность того, что квант (с той же частотой x), поглощенный на границе полубесконечной среды, пролетит на глубине τ в направлении η к ее границе. Из физического смысла этих величин очевидно, что \tilde{F} , в отличие от F , описывает процесс рассеяния квантов, испытывающих в среднем много актов рассеяния. Поэтому уже для небольших глубин величину \tilde{F} можно приближенно, но достаточно точно, заменить ее асимптотическим поведением, соответствующим большим глубинам. Последнее можно представить в следующей форме с разделяющимися переменными:

$$\tilde{F}(\tau_0, z) \simeq C(\tau_0) z. \quad (8)$$

При существенно больших глубинах (при тех же значениях z) аналогичное поведение начинает выполняться и для величины F . Такое большое различие в точности асимптотических поведений \tilde{F} и F подтверждается также численными расчетами.

Идея наших приближенных решений уравнений (4) состоит в том, что под интегралами в выражении (2) мы берем точную величину $F(\tau, z)$, а величину $\tilde{F}(\tau, z)$ заменяем ее асимптотическим поведением (8). Хотя это приближение сильно нарушается в области больших z , но будучи использованным только в подынтегральных выражениях и, что очень важно, только при наибольшем значении параметра τ , отвечающем толщине τ_0 , оно не приводит к значительной погрешности в силу того, что эти выражения содержат другие функции, быстро стремящиеся к нулю с увеличением z .

Используя это приближение, перепишем выражение для образа (6) в виде

$$\tilde{f}_z = \tilde{F}(\tau_0, z) (f_0 - f_z). \quad (9)$$

Окончательно для решений $s(z)$ и $h(z)$ находим

$$s(z) = S(z) - \beta(\tau_0, z) S_z + (\beta(\tau_0, z) P_z(\tau_0) - \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z)) s_0, \quad (10)$$

$$h(z) = H(z) + \beta(\tau_0, z) H_z + (\beta(\tau_0, z) P_z(\tau_0) + \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z)) h_0,$$

где $\varphi(z)$ — φ -функция Амбарцумяна [1, 4],

$$\beta(\tau_0, z) = P(\tau_0, z) - \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z) = \frac{\lambda}{2} \varphi(z) (F(\tau_0, z) - \tilde{F}(\tau_0, z)). \quad (11)$$

Таким образом, мы выразили искомые функции $s(z)$ и $h(z)$ через $S(z)$ и $H(z)$ и постоянные нормировки s_0 и h_0 . Подставляя теперь (11) в (10) и интегрируя с учетом сделанного приближения, находим

$$s_0 = \frac{S_0 - S_\beta}{1 + \alpha_0 - P_\beta}, \quad h_0 = \frac{H_0 + H_\beta}{1 - \alpha_0 - P_\beta}, \quad (12)$$

где

$$f_0 \equiv \int_0^{\infty} f G dz, \quad f_\beta = \int_0^{\infty} \beta f G dz, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \varphi \tilde{F} G dz.$$

Формулы (10)–(12) и решают окончательно поставленную задачу: они явным образом выражают решение задачи о слое конечной толщины τ_0 через решения аналогичной задачи для полубесконечной среды.

Перейдем теперь к выводу приближенных и асимптотических форм из наших решений. Если использовать также приближение, состоящее в замене под интегралом величины $F(\tau_0, z)$ ее асимптотическим поведением $C(\tau_0)z$, то решения заметно упростятся. Тогда

$$s_0 = \frac{S_0}{1 + \alpha_0}, \quad h_0 = \frac{H_0}{1 - \alpha_0}. \quad (13)$$

По точности такие решения мало уступают предыдущим.

Более существенное упрощение, но связанное с большой потерей точности, связано с использованием приближения $F = C(\tau_0)z$ не только под интегралами. Тогда нужно $\beta \rightarrow 0$, и решения примут «асимптотическую» форму

$$s = S - \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z) s_0, \quad (14)$$

$$h = H + \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z) h_0.$$

При этом, вообще говоря, нужно заменить характеристики полубесконечной среды S и H , содержащие τ_0 , их асимптотическим поведением при больших $\tau_0 \gg z$, и мы получим аналог асимптотических решений, известных для X - и Y -функций Иванова [4]:

$$\frac{\lambda}{2} \varphi(\tau_0, z) = \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \left(1 - \tilde{F}(\tau_0, z) \frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\alpha_0^2} \alpha_0 \right), \quad (15)$$

$$\frac{\lambda}{2} \psi(\tau_0, z) = \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z) \frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\alpha_0^2}.$$

Для иллюстрации высокой точности найденных аналитических решений приведем результаты расчетов φ - и ψ - функций Амбарцумяна

(при этом $S(z) = \frac{\lambda}{2} \varphi(1+F)$, $H(z) = \frac{\lambda}{2} \varphi(1-F)$) для случая лоренцовского профиля, когда $z = \tau_1(x^2 + 1)$:

$$\varphi(\tau_0, z) = \varphi(z) - \frac{2}{\lambda} \frac{\tilde{F}(\tau_0, z)}{\varphi(z)} \beta(\tau_0, z) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \varphi_0\right) - \frac{\lambda}{2} \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z) \psi_0, \quad (16)$$

$$\psi(\tau_0, z) = \varphi(z) \tilde{F}(\tau_0, z) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \varphi_0\right) + \frac{2}{\lambda} \frac{\beta(\tau_0, z)}{\varphi(z)} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \tilde{F}(\tau_0, z) \psi_0\right),$$

$$\lambda \varphi_0 = s_0 + h_0, \quad \lambda \psi_0 = s_0 - h_0.$$

Для удобства сравнения с известными данными в таблице приведены результаты расчетов функций $X = \varphi/G$ и $Y = \psi/G$ с помощью аналитических выражений (16) (первая строка), численного решения уравнений (4) методом дискретизации (вторая строка) и асимптотических решений (15) (третья строка). Расчеты проведены для 20 значений $z = \text{tg} \sigma / 2$, где σ меняется равномерно от 0 до 1. Выбранное значение $\lambda = 0,65$ отвечает конкретному мёссбауэровскому ядру Zn^{67} .

Таблица

$\lambda = 0,65$

τ_0	0,1		1,0		5,0		10,0	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0,257	1,04585 1,04655 1,08297	0,71843 0,71463 0,02934	1,09515 1,09744 1,09577	0,05489 0,05767 0,01304	1,10043 1,10063 1,10034	0,00405 0,00444 0,00267	1,10070 1,10075 1,10067	0,00137 0,00148 0,00106
0,51	1,05424 1,05033 1,11514	0,87226 0,86246 0,06094	1,13745 1,13991 1,14173	0,21686 0,21873 0,02709	1,15143 1,15180 1,15121	0,00973 0,01031 0,00554	1,15196 1,15206 1,15190	0,00303 0,00321 0,00221
1,0	1,06448 1,05258 1,13919	0,96580 0,96042 0,12622	1,17892 1,17896 1,19426	0,49601 0,49306 0,05611	1,21430 1,21492 1,21390	0,03398 0,03454 0,01147	1,21547 1,21565 1,21533	0,00726 0,00750 0,00457
2,04	1,07874 1,05416 1,12588	1,02902 0,99489 0,27380	1,20657 1,20902 1,24534	0,72268 0,78347 0,12171	1,28712 1,28785 1,28795	0,17268 0,17165 0,02029	1,29128 1,29159 1,29104	0,03124 0,03130 0,00992
3,08	1,08876 1,05522 1,07763	1,05519 1,01086 0,42710	1,23244 1,22140 1,26398	0,92991 0,91011 0,18987	1,32664 1,32719 1,33045	0,33806 0,33480 0,02986	1,33521 1,33563 1,33527	0,09004 0,08945 0,01548
4,83	1,10082 1,05664 0,96327	1,07940 1,02314 0,69400	1,24847 1,23157 1,26605	1,04439 1,01629 0,30850	1,36434 1,36447 1,37405	0,56728 0,56076 0,04382	1,38025 1,38087 1,38188	0,23340 0,23124 0,02515
7,03	1,11146 1,05829 0,79239	1,09665 1,03050 1,03698	1,26029 1,23849 1,24480	1,11484 1,08000 0,46097	1,39036 1,39015 1,40619	0,75840 0,74920 0,05812	1,41334 1,41430 1,44390	0,41012 0,40521 0,03758

Как показывает сравнение данных, решение для φ точнее, чем для ψ . Точность возрастает с ростом толщины слоя τ_0 , с уменьшением вероятности выживания λ и при приближении к центру линии ($z \rightarrow 0$).

Из данных таблицы видно также, что приближенные решения для X и Y , приведенные в работе [4], существенно отличаются от точных решений. Хотя X -функция с увеличением толщины среды приближается к точной, этого нельзя сказать об Y -функции. Она заметно отличается от точной даже при больших τ_0 . А между тем именно эта функция представляет наибольший интерес для эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А. Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
2. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии. Изд. тех. теор. лит., М., 1956.
3. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. Изд. Наука, М., 1972.
4. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. Изд. Наука, М., 1969.
5. Мнацаканян М. А. Астрофизика, 16, 513 (1980).
6. Мкртчян А. Р., Габриелян Р. Г. Астрофизика, 20, 607 (1984).
7. Мнацаканян М. А. ДАН СССР, 225, 1049 (1975).
8. Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. Математические заметки, 19, 927 (1976).

ՀԱՐԹ ՇԵՐՏՈՒՄ ՀԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈՒՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԲԱՐՁՐ
 ՀՇՏՈՒԹՅԱՄԲ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԸՍՏ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՐԻՎ
 ՎԵՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ՄՈԴԵԼԻ ՀԱՄԱՐ

Թ. Գ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ռ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Խ. Վ. ԲՈՒՄԵՆՉՅԱՆ, Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

Գտնված են վերջավոր օպտիկական հաստությամբ եռաչափ միջավայրում ամենաընդհանուր դրվածքով ոչ կոհերենտ ճառագայթման տեղափոխման խնդրի բարձր ճշտությամբ մոտավոր անալիտիկ լուծումներ ըստ հաճախությունների լրիվ վերաբաշխման մոդելի համար.

NEARLY-EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF RADIATION TRANSFER IN A PLANE LAYER FOR THE MODEL OF COMPLETE FREQUENCY REDISTRIBUTION

R. G. GABRIELIAN, A. R. MKRTCHYAN,
 KH. V. KOTANDZIAN, M. A. MNATSAKANYAN

Approximate nearly-exact analytical solutions of the most commonly formulated problem of incoherent transfer of radiation in three-dimensional medium of finite thickness were obtained for the model of complete frequency redistribution.

