

УДК 530.145.6

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТИПА

$$u_t = A(u) u_{xx} + F(u, u_x)$$

С. М. МАЗМАНЯН, В. С. САРДАРЯН

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

(Поступила в редакцию 15 января 1986 г.)

Исследованы три системы двух уравнений с частными производными типа $u_t = A(u) u_{xx} + F(u, u_x)$. Показано, что при специальных граничных условиях все нетривиальные решения указанных систем имеют вид солитонов (кинк, антикинк).

В последнее время уделяется большое внимание нелинейно-колебательным явлениям в самых различных областях физики. Это, отчасти, вызвано появлением новых методов нахождения солитонных решений для широкого класса нелинейных уравнений [1].

В работах [2, 3] приведены условия интегрируемости и показано существование законов сохранения систем двух уравнений типа

$$u_t = A(u) u_{xx} + F(u, u_x), \quad (1)$$

где $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица с коэффициентами, которые могут зависеть от u, v , а F — двухкомпонентный вектор,

$$F = \begin{pmatrix} f(u, v, u_x, v_x) \\ g(u, v, u_x, v_x) \end{pmatrix}.$$

В работе [2] проведены конформные и обратимые замены переменных, связанные с существованием законов сохранения нулевого порядка и приводящие уравнения типа (1) к каноническому виду

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x) \\ v_t = -v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x). \end{cases} \quad (2)$$

Установлено [2, 3], что любая система (2), имеющая два локальных закона сохранения достаточно высокого порядка, с необходимостью обладает серией канонических законов сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_k,$$

вид которых определяется непосредственно правой частью системы. Плотности первых трех канонических законов сохранения вычисляются на основе следующих рекуррентных формул:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (f_{u_x} - g_{v_x}),$$

$$\rho_2 = \sigma_1 - \frac{1}{4} (f_{u_x}^2 + g_{v_x}^2) - f_{v_x} g_{u_x} + f_u + g_v,$$

$$\rho_3 = \sigma_2.$$

В настоящей работе простейшим методом расчета солитонов решены некоторые системы уравнений, приведенные в [3].

Рассмотрим следующие системы нелинейных уравнений типа (1):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2uu_x + 2v_x \\ v_t = -v_{xx} + 2uv_x + 2vu_x, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + uv_x \\ v_t = -v_{xx} + u_x, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (2uv - u^2)_x \\ v_t = -v_{xx} - (2uv - v^2)_x. \end{cases} \quad (5)$$

При отыскании решений необходимо сначала выяснить, имеет ли данная система уравнений подходящие решения в виде уединенных волн [4], а затем посмотреть, являются ли они солитонами, т. е. сохраняют ли они свою форму и скорость после столкновения.

Решения систем (3)–(5) будем искать в виде уединенной волны:

$$u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad (6.1)$$

где

$$\xi = x - a^2 t. \quad (6.2)$$

Пусть

$$\begin{aligned} u &\rightarrow A, \quad v \rightarrow B \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty, \\ u &\rightarrow A', \quad v \rightarrow B' \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь a, A, A', B, B' — произвольные постоянные. При этом из уравнения (6.2) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -a^2 \frac{d}{d\xi}. \quad (8)$$

Исходя из систем уравнений (3)–(5) и предполагая, что они имеют решения в виде волны вида (6)–(8), бегущей со скоростью a^2 , получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Так как вышеупомянутые системы уравнений решаются одним и тем же методом, для краткости в дальнейшем будем рассматривать одну систему, например первую:

$$\begin{cases} -a^2 u_\xi = u_{\xi\xi} + 2uu_\xi + 2v_\xi \\ -a^2 v_\xi = -v_{\xi\xi} + 2uv_\xi + 2vu_\xi. \end{cases} \quad (9)$$

Проинтегрировав оба уравнения этой системы, получим

$$\begin{cases} u' + u^2 + a^2 u + 2v + b = 0 \\ v' - 2uv - a^2 v - c = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где b и c — постоянные интегрирования.

Исключив v из системы (10) и проинтегрировав полученное уравнение, общее решение в виде бегущей волны можно записать в форме эллиптического интеграла

$$\pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \xi + \xi_0, \quad (11)$$

где

$$Q(u) = u^4 + 2a^2 u^3 + (u^4 + 2b) u^2 + (2a^2 b + 4c) u + d,$$

u_0 — значение u при $\xi = 0$, а ξ_0 и d — постоянные.

Поскольку уединенная волна локализована в некоторой области, ее первая и вторая производные при $\xi \rightarrow \pm \infty$ должны обращаться в нуль. Это условие требует, чтобы $d = 0$ и $a^2 b + 2c = 0$. Проинтегрировав (11) при произвольных значениях постоянной интегрирования b , можно непосредственно убедиться, что решение $u(\xi)$ содержит периодическую бегущую кноидальную волну, которую можно выразить через эллиптические функции Якоби [5]. Если, в частности, предположить, что $b = 0$, то тогда (11) интегрируется без труда. При знаке „+“ получается кинкообразная уединенная волна

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] + 1 \right\}, \quad (12)$$

а при знаке „—“ получается антикинк

$$u(x, t) = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] - 1 \right\}. \quad (13)$$

Учитывая (10), (12) и (13), получим две пары решений системы (9):

$$\begin{cases} u(x, t) = -\frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] + 1 \right\} \\ v(x, t) = \frac{1}{4} a^4 \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] \end{cases} \quad (14)$$

и

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] - 1 \right\} \\ v(x, t) \equiv 0. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогичным образом для системы уравнений (4) (уравнение Буссинеска) получаем решения

$$\begin{cases} u(x, t) = -3a^6 \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] \cdot \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] + 1 \right\} \\ v(x, t) = 3a^4 \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right], \end{cases} \quad (16)$$

а для системы уравнений (5) имеем

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] + 1 \right\} \\ v(x, t) = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] - 1 \right\} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} u(x, t) = -\frac{1}{2} a^2 \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} a^2 (x - x_0 - a^2 t) \right] - 1 \right\} \\ v(x, t) \equiv 0. \end{cases} \quad (18)$$

Решения (14)–(18) представляют собой уединенные волны, которые образуют однопараметрическое (если не считать тривиального переноса вдоль оси x на величину x_0) семейство в форме импульсов, скорость движения которых — a^2 . Для семейства однопараметрических решений уравнения Кортевега-де Вриса [6, 7] скорость импульсов, как известно, пропорциональна амплитуде, а ширина $1/a$ обратно пропорциональна квадратному корню из амплитуды. Для семейства же решений $v(x, t)$ в (14) и (16) в отличие от этого скорость импульсов пропорциональна квадратному корню из амплитуды, а ширина $1/a^2$ обратно пропорциональна квадратному корню из амплитуды. Аналогичные суждения можно распространить и на семейство решений (14)–(18).

Таким образом, в данном семействе более «высокие» уединенные волны распространяются быстрее «низких», т. е. импульс с параметром $a^2 = a_2^2 > a_1^2$ обгонит второй импульс с параметром a_1^2 . Ясно, что по мере распространения он пройдет через второй импульс и в асимптотике импульсы поменяются местами. Нетрудно видеть, что набор n солитонов систем (3)–(5) с параметрами $a_n^2 > a_{n-1}^2 > \dots > a_1^2$, упорядоченный в последовательности $n, n-1, \dots, 1$ при $t \rightarrow -\infty$, станет упорядоченным естественным образом $1, 2, \dots, n$ при $t \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scott A. C., Chu F. Y., McLaughlin D. W. IEEE, J. QE — 1, 16), 1443 (1965).
2. Михайлов А. В., Шабат А. Б. ТМФ, 62, 163 (1985).
3. Михайлов А. В., Шабат А. Б. ТМФ, 66, 47 (1986).
4. Scott A. C. Active and nonlinear wave propagation in electronics. New York: Wiley — Interscience, 1970.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Изд. Наука, М., 1964.
6. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. Изд. Мир, М., 1981.
7. Солитоны. Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. Изд. Мир, М., 1983.

ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵՐԿՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՍՈԼԻՏՈՆԱՅԻՆ ԼՈՒՅՈՒՄՆԵՐԸ

Ս. Մ. ՄԱԶՄԱՆՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ

Հետազոտված են մասնակի ածանցյալներով $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$ տիպի ոչ գծային երկու հավասարումներից կազմված երեք համակարգեր: Ցույց է տրված, որ հատուկ սահմանային պայմանների դեպքում նշված համակարգերի ոչ տրիվիալ լուծումները ունեն սոլիտոնի տեսք:

SOLITON SOLUTIONS FOR SYSTEMS OF TWO NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

S. M. MAZMANYAN, V. S. SARDARYAN

Three systems of two nonlinear partial differential equations of $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$ type are investigated. It is shown that under special boundary conditions

УДК 621.384.65

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ МОДУЛИРОВАННОГО ТОКА В ВОЛНОВОДЕ

К. А. БАРСУКОВ, Н. В. РЯЗАНЦЕВА

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

(Поступила в редакцию 26 февраля 1986 г.)

Исследованы свойства переходного излучения и излучения Вавилова-Черенкова, возникающих при каклонном прохождении модулированного тока через волновод с диэлектрическим заполнением. Показано, что при определенных условиях возможно возникновение сложного эффекта Вавилова-Черенкова. Обсуждаются возможности параметрического возбуждения волновода.

В работе [1] исследовалось переходное излучение в волноводе с диэлектрическим заполнением от точечной частицы, движущейся поперек оси волновода, и отмечались преимущества такого способа генерации переходного излучения и излучения Вавилова-Черенкова (ИВЧ) (возможность простого разделения пучка заряженных частиц и излучения). Вместе с тем в реальных условиях излучателем является система заряженных сгустков или модулированный пучок. В этом случае меняется не только величина энергии излучения по сравнению с точечным излучателем, но и возможно появление различных параметрических эффектов. Так, при возникновении ИВЧ в волноводе его спектр оказывается дискретным, и при определенных соотношениях между пространственными частотами пучка и частотами ИВЧ происходит резкое усиление его энергии излучения. Механизм этого явления тот же, что и в лазере на свободных электронах, реализованном экспериментально [2].

Модулированный ток может представлять собой систему точечных частиц или протяженных сгустков, пересекающих волновод. Ниже исследуются особенности переходного излучения, связанные с наличием волн пространственного заряда в излучающем пучке в регулярном волноводе с идеально проводящими стенками, заполненном диэлектриком с постоянными значениями ϵ и $\mu = 1$.

Пусть ось волновода совпадает с осью z некоторой прямоугольной системы координат. Рассмотрим модулированный ток в виде нескольких движущихся точечных эквидистантных заряженных частиц. Уравнение движения отдельного заряда с индексом s , $s = 1, 2, 3, \dots, N$, можно записать в виде