Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 22, вып. 1, 16—21 (1987)

УДК 530.001

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СПИРАЛЬНОГО ОНДУЛЯТОРА

Л. А. ГЕВОРГЯН, П. М. ПОГОСЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 5 июля 1985 г.)

Решено уравнение движения частицы в неоднородном магнитном поле спирального ондулятора. Получено частотное распределение интенсивности излучения с учетом неоднородности магнитного поля. Выявлены условия, при которых неоднородность магнитного поля приводит к уширению линии и изменению спектрального распределения интенсивности излучения.

Ондуляторное излучение в качестве источника мощных направленных фотонных пучков разных энергий имеет ряд приложений, в частности, в лазерах на свободных электронах, что повышает интерес к этому излучению.

Проведенные расчеты траектории движения электрона в спиральном ондуляторе обычно используют осевое приближение магнитного поля (см. [1] и цитируемую там литературу). Такой метод не учитывает возможные изменения спектра излучения из-за пролета частицы в приосевой области. В работах [2—4] решалось уравнение движения заряженной частицы с учетом неоднородности поля спирального ондулятора, однако результаты работы [2, 3] являются ошибочными.

В предлагаемой работе получена формула частотного распределения интенсивности излучения с учетом неоднородности магнитного поля.

1. Траектория частицы в неоднородном поле спирального ондулятора

Общий вид поля бесконечного спирального ондулятора легко получить из [5]:

$$H_\rho = 2A \sum_{\lambda}^{1,3,5\cdots} \lambda \sin\lambda(\varphi - kz)\, K'_\lambda(\lambda, b)\; I'_\lambda(\lambda, k, \rho),$$

$$H_\varphi = 2A \sum_{\lambda}^{1,3,5\cdots} \lambda \cos\lambda(\varphi - kz)\, K'_\lambda(\lambda, b)\; I_\lambda(\lambda, k, \rho)/k\rho, \qquad (1)$$

$$H_z = -2A \sum_{\lambda}^{1,3,5\cdots} \lambda \cos\lambda(\varphi - kz)\, K'_\lambda(\lambda, b)\; I_\lambda(\lambda, k, \rho),$$

где $A = 2Ik/l$, $k = 2\pi/l$, $ka = b$, I — величина силы тока в обмотках ондулятора, l — шаг намотки спирали с током, a — радиус спирали,

ρ, φ, z — цилиндрические координаты, $K'_{\lambda}(\lambda, b)$, $I_{\lambda}(\lambda, k, \rho)$, $I'_{\lambda}(\lambda, k, \rho)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода и их производные.

Для вычисления магнитного поля в приосевой области используем свойство функций, входящих в (1), и условие малости отклонения от оси: $k^2 r_0^2 = k^2 (x_0^2 + y_0^2) \ll 1$. Тогда с точностью до членов порядка $k^2 r_0^2$ в прямоугольной системе координат для компонент поля получим выражения

$$H_x = -H_0 \left\{ \left(1 + \frac{1}{8} k^2 (3x^2 + y^2)\right) \sin kz - \frac{1}{4} k^2 xy \cos kz \right\},$$

$$H_y = H_0 \left\{ \left(1 + \frac{1}{8} k^2 (x^2 + 3y^2)\right) \cos kz - \frac{1}{4} k^2 xy \sin kz \right\}, \qquad (2)$$

$$H_z = -H_0 \left\{ k (x \cos kz + y \sin kz) \left[1 + \frac{1}{8} k^2 (x^2 + y^2)\right] \right\},$$

где $H_0 = AK'_1(b)$, совпадающие с аналогичными выражениями в [2].

Для расчета траектории частицы с массой m и зарядом e, попадающей в ондулятор в точке $r_0(x_0, y_0, 0)$ со скоростью инжекции $\mathbf{v} = c \left\{ -\frac{1}{2} \beta_{\perp} \varepsilon_1 \varepsilon_2, \; \beta_{\perp} \left(1 + \frac{1}{4} (3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\right), \; \beta_z \right\}$, что обеспечивает бездрейфовый пролет, следует решить уравнение движения в поле (2):

$$\frac{d}{dt} \dot{r} = f [\beta, \mathbf{H}],$$

где $f = e/m\gamma$, $\beta c = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\}\, c$ — скорость частицы в ондуляторе.

Решение методом последовательных приближений приводит к следующим выражениям для скорости и траектории частицы:

$$\beta_x = -\beta_{\perp} \left[\sin \Omega t \left(1 + \frac{1}{4} (\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2)\right) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \Omega t \right],$$

$$\beta_y = \beta_{\perp} \left[\cos \Omega t \left(1 + \frac{1}{4} (3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\right) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \Omega t \right], \qquad (4)$$

$$\beta_z = \beta_{z_0} + \frac{\beta_{\perp}}{4\beta_{z_0}} \beta_{\perp} \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin 2\Omega t - \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \cos 2\Omega t \right].$$

и

$$x = R \left[\cos \Omega t \left(1 + \frac{1}{4} (\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2)\right) - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \Omega t \right] +$$

$$+ x_0 - R \left(1 + \frac{1}{4} (\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2)\right), \qquad (5)$$

$$y = R \left[\sin \Omega t \left(1 + \frac{1}{4} (3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\right) - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \Omega t \right] + y_0 + \frac{1}{2} R \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

$$z = \beta_{z_0} ct - \frac{\beta_{\perp}}{8\beta_{z_0}} R \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\Omega t + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin 2\Omega t \right] + \frac{\beta_{\perp}}{8\beta_{z_0}} R \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

2—1220

где

$$\beta = q/\gamma,\ q = eH_0 l/\pi mc^2,\ \Omega = 2\pi\beta_z c/l,\ R = \beta_\perp c/\Omega,$$

$$\beta_{z_0} - \beta_z = \frac{\beta_\perp^2}{8\beta_{z_0}}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2),\ \varepsilon_1 = \pi x_0/l,\ \varepsilon_2 = \pi y_0/l.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае продольная компонента скорости частицы несколько отличается от ее значения при движении частицы вокруг оси:

$$\beta_{z_0}^2 - \beta_z^2 = \alpha,\ \alpha = \frac{1}{2}(3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2). \tag{6}$$

Легко убедиться, что выражения (4) и (5) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ переходят в известные выражения [6, 7].

2. Частотное распределение интенсивности излучения

Для расчета частотного распределения интенсивности излучения воспользуемся формулой [8]

$$\frac{d^2 W}{d\omega\, do} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}|\mathbf{J}|^2, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{J} = \int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{n}, \beta]\exp\{i[\omega t - \mathbf{kr}]\}\,dt,\ \mathbf{n} = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\},$$

ω — излученная частота, $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$, $\beta = \mathbf{v}/c$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы. Для простоты изложения при расчете распределения интенсивности излучения используем зависимость $z(t) = \beta_z ct$ без учета продольных колебаний (см. (5)). Дело в том, что эти колебания приводят к дополнительным слагаемым, зависящим от угла φ, но они не вносят вклада в частотное распределение интенсивности.

Разложив плоскую волну по цилиндрическим функциям:

$$\exp[-i\psi_0\sin(\Omega t + \Phi)] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu(\psi_0)\, e^{-i\nu\Omega t} e^{-i\nu\Phi},$$

где $J_\nu(\psi)$ — функция Бесселя, и проинтегрировав по времени выражение для $|\mathbf{J}|^2$, заменив при этом одну из δ-функций на $L/2\beta_z c$, получим

$$|\mathbf{J}|^2 = \frac{2\pi L}{\beta_z c}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Big\{\Big[\beta_z^2\sin^2\theta + \beta_\perp^2\cos^2\theta\frac{\nu^2}{\psi_0^2} - 2\beta_z\beta_\perp\sin\theta\cos\theta\times$$

$$\times\sin(\Phi + \varphi)\frac{\nu}{\psi_0}\Big] J_\nu^2(\psi_0) + \beta_\perp^2 J_\nu'^2(\psi_0)\Big\}\delta(u - \nu\Omega), \tag{8}$$

где L — длина ондулятора,

$$u = \omega(1 - \beta_z\cos\theta),\ \psi_0^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2,\ \Phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\psi_1}{\psi_2},$$

$$\psi_1 = \omega R\sin\theta(\cos\varphi(1 + \alpha_2) - \alpha_{12}\sin\varphi)/c,\ \psi_2 = \omega R\sin\theta(\sin\varphi(1 + \alpha_1) -$$

$$- \alpha_{12}\cos\varphi)/c,\ \alpha_1 = (3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)/4,\ \alpha_2 = (\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2)/4,\ \alpha_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2/2.$$

Легко видеть, что при условии пролета частицы вокруг оси ондулятора выражение (8) переходит в известное выражение [6, 7].

Подставляя (8) в (7) и интегрируя по фазовому объему, для частотного распределения интенсивности излучения с единицы пути пролета получим выражение

$$\frac{d^2W_\nu}{d\omega\, dz} = \frac{e^2 \omega q^2}{c^2 \gamma^2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{q} \sqrt{\frac{\nu - x}{x}} - \frac{\nu}{\psi} \right)^2 J_\nu^2(\psi) + J_\nu'^2(\psi) \right\},$$

$$\psi = \frac{2q\,(1+\alpha/2)}{\sqrt{1+q^2(1+\alpha)}} [x\,(\nu - x)\,(1+\varepsilon^2)]^{1/2}, \tag{9}$$

где

$$x = \omega/2\Omega\,\gamma_z^2,\ \ \varepsilon^2 = \left\langle \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 \sin\varphi - \varepsilon_2 \cos\varphi)^2 \right\rangle = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2.$$

Отметим, что все члены, кроме аргумента функции Бесселя в (9), выписаны с точностью до $\max(\alpha, 1/\gamma_z^2)$. Что касается $\sin(\Phi + \varphi)$, то это выражение с большой точностью равно единице. Действительно, раскрыв это выражение с учетом приведенного значения Φ и разложив полученные выражения в ряд по степеням малых величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$, с точностью до $\alpha_0^2 = \max^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12})$ будем иметь $\sin(\Phi+\varphi) = 1 - O(\alpha_0^2)$.

При максимальной частоте $x = \nu$ параметр ψ принимает минимальное (нулевое) значение, а при $x = \nu/2$ — максимальное значение

$$\psi_m = \frac{\nu\,[q\,(1+\alpha/2)]}{\beta_z} \left\{ \frac{1+\varepsilon^2}{1+q^2(1+\alpha)} \right\}^{1/2}.$$

Поскольку x меняется от нуля до ν, то, согласно (9), излучается максимальная частота только на первой гармонике.

Сравним в окрестности частоты $x = \nu/2$ выражение (9) с аналогичным выражением для излучения частицы в однородном поле. В дипольном случае $q \ll 1$ аргумент функций Бесселя намного меньше их порядка, поэтому с точностью до ε^2 можно положить $\varepsilon = 0$, и выражение (9) совпадет с известным выражением [6, 7].

В недипольном случае $q \gtrsim 1$, когда из-за того, что аргумент и индекс функций Бесселя являются величинами одного порядка, становятся существенными и высшие гармоники, представим ψ_m в виде

$$\psi_m = \nu + \nu^{1/3} z,\ \ z = \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{2q^2} + \frac{q^2}{2\gamma^2} \right) \nu^{2/3}$$

и применим к функциям Бесселя следующую асимптотику

$$J_\nu(\nu + \nu^{1/3} z) = 2^{1/3} \nu^{-1/3} \mathrm{Ai}\,(-2^{-1/3} z),$$

где $\mathrm{Ai}\,(x)$ — функция Эйри. Изменениям аргумента функции Эйри порядка единицы соответствуют существенные изменения самой функции. Это позволяет сделать вывод, что спектральное распределение излучения гармоник с номерами $\nu \gtrsim 2\varepsilon^{-3}$ существенно меняется из-за неоднородности поля. Кроме того, учет неоднородности магнитного поля приводит к уширению линии излучения:

$$\left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_{\text{неод}} = \frac{q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(3\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2),$$

которая может превышать естественную ширину линии, пропорциональную обратной величине числа витков ондулятора.

3. Заключение

Отметим, что в работе [3], как и в [2], уравнение движения частицы в поле (2) решалось методом Капицы [10]. Этот метод, как известно, применим тогда, когда существующее поле состоит из суперпозиции таких полей, у которых частоты осцилляций заметно отличаются друг от друга. Но поле в околоосевой области ондулятора в первом приближении учета неоднородности имеет только одну частоту осцилляций. Поэтому в данном случае применение указанного метода неправомерно и, следовательно, приводит к неверным результатам. В [4] получены выражения для траектории частицы в неоднюродном поле спирального ондулятора, которые при определенных условиях переходят в (5).

В рассмотренной работе получена формула спектрального распределения интенсивности излучения с учетом неоднородности поля в приосевой области и показано, что неоднородность в дипольном случае не влияет на спектральные характеристики излучения, а в недипольном случае при условии $\nu\varepsilon^3/2 \gtrsim 1$ существенно влияет на них; неоднородное уширение линии может быть больше естественной ширины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варфоломеев А. А.* Лазеры на свободных электронах и перспективы их развития. ИАЭ, М., 1980.
2. *Blewett J. P., Chasman R.* J. Appl. Phys., 48, 2692 (1977).
3. *Тихонов В. Н.* Препринт ИАЭ—3841/1, 1983.
4. *Оганджанян А. А.* Препринт ЕФИ—736 (51)—84, 1984.
5. *Бухгольц Г.* Расчет электрических и магнитных полей. Изд. ИЛ, М., 1961.
6. *Алферов Д. Ф.* и др. Труды ФИАН СССР, 80, 100 (1975).
7. *Геворгян Л. А., Погосян П. М.* Изв. АН АрмССР, Физика, 19, 239 (1984).
8. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. Изд. Мир, М., 1965.
9. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Изд. ИЛ, М., 1949.
10. *Капица П. Л.* ЖЭТФ, 21, 588 (1951).

ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ՊԱՐՈՒՐԱՁԵՎ ՕՆԴՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԴԱՇՏՈՒՄ

Լ. Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Պ. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Լուծված է մասնիկի շարժման հավասարումը պարուրաձև օնդուլյատորի անհամասեռ մագնիսական դաշտում։ Ստացված է ճառագայթման ինտենսիվության հաճախային բաշխումը։ Որոշված են այն պայմանները, որոնց դեպքում դաշտի անհամասեռությունը բերում է ճառագայթման գծի լայնացմանն ու ճառագայթման ինտենսիվության սպեկտրալ բաշխման փոփոխությանը։

THE RADIATION FROM A CHARGED PARTICLE IN AN INHOMOGENEOUS FIELD OF HELICAL UNDULATOR

L. A. GEVORGYAN, P. M. POGOSYAN

The equation of particle motion in an inhomogeneous magnetic field of helical undulator is solved. The frequency distribution of radiation intensity allowing for the magnetic field inhomogeneity is obtained. The conditions are produced, under which the magnetic field inhomogeneity leads to the broadening of radiation line and to the change of spectral distribution of radiation intensity.