Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 22, вып. 1, 3—8 (1987)

УДК 530.145

ФОТОННЫЙ ВАКУУМ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ МЕЖДУ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН

Институт прикладных проблем физики АН Арм.ССР
Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 17 апреля 1985 г.)

Рассчитаны компоненты перенормированного тензора энергии-импульса электромагнитного вакуума в сферическом конденсаторе. Установлен ряд свойств этого тензора. Вычислены силы, действующие на бесконечно тонкие, идеально проводящие обкладки конденсатора, а также полная энергия вакуума внутри и вне конденсатора.

В работе [1] было показано, что две незаряженные, проводящие, параллельные пластины в вакууме притягиваются с силой, обратно пропорциональной четвертой степени расстояния между ними. Этот эффект объясняется зависимостью энергии вакуумного состояния электромагнитного поля от расстояния между пластинами (см. [2]). Аналогичные задачи решены также в случае пересекающихся пластин, прямоугольного ящика, тора, цилиндра, и некоторых других конфигураций. Для сферической идеально проводящей поверхности полная энергия вакуума рассчитана в [3—6]. В работах [5, 7, 8] получены приближенные значения компонент вакуумного тензора энергии-импульса (ТЭИ). Ниже рассмотрен более общий случай сферического конденсатора. В предельных случаях он сводится к задаче о вакууме либо между плоско-параллельными пластинами, либо в сферической полости в проводнике, либо вне проводящего шара. В [9] приближенными методами вычислена сила, действующая на внутреннюю обкладку конденсатора. Аналогичная задача рассмотрена в [10].

Вакуумное среднее ТЭИ электромагнитного поля определяется формулой

$$\langle 0|\tau_{ik}|0\rangle = \sum_{\alpha} \tau_{ik}(A_{\alpha}^{a}, A_{\alpha}^{b*}), \tag{1}$$

где $\tau_{ik}(A^a, A^b)$ — билинейная по вектору-потенциалу A^a форма, определяемая видом классического ТЭИ, $|0\rangle$ — амплитуда состояния возмущенного вакуума, $\{A_{\alpha}^{a}, A_{\alpha}^{b*}\}$ — полная ортонормированная система положительно- и отрицательно-частотных решений уравнений поля, описывающих фотон с набором квантовых чисел α [2]. В соответствии с симметрией задачи рассмотрим состояния $\alpha = (\omega l m \lambda)$ с определенными значениями энергии ω ($\hbar = c = 1$), полного момента $l = 1, 2, 3, \cdots$, его проекции m и четности $(-1)^{l-\lambda+1}$. Будем пользоваться окулновской калибровкой: $A^{\alpha}=(0, \mathbf{A})$, $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. В такой калибровке имеются только поперечные фотоны магнитного ($\lambda=0$) и электрического ($\lambda=1$) типов.

Подставив соответствующие векторы-потенциалы, нормированные в слое $a\leqslant r\leqslant R$ (a и R — радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора), в (1), после суммирования по m и ряда преобразований получим

$$q=\frac{1}{8\pi^{2}}\sum_{l\lambda}\sum_{\omega_n\geqslant 0}\frac{f_{\lambda l}^{(q)}(a, r, \omega_n)}{\partial S_{\lambda l}(a, R, \omega_n)/\partial\omega_n},\quad q=\varepsilon, p, p_{\perp}, \tag{2}$$

где ε — плотность энергии вакуума, p и $p_{\perp}$ — его давления в радиальном и поперечном направлениях;

$$\tau_i^k=\operatorname{diag}(\varepsilon, -p, -p_{\perp}, -p_{\perp}),$$

$$S_{\lambda l}(a, R, \omega)=[\operatorname{arc\,tg}\Omega_{\lambda l}(\omega a)-\operatorname{arc\,tg}\Omega_{\lambda l}(\omega R)]/\pi,$$

$$[1+\Omega_{\lambda l}^{2}(\omega a)]\, f_{\lambda l}^{(q)}(a, r, \omega)=\begin{cases}\omega^{3}[l g_{l+1}^{2}+(l+1)\, g_{l-1}^{2}+(2l+1)\, g_{l}^{2} & \text{при } q=\varepsilon\\ l(l+1)(2l+1)\,\omega r^{-2} g_{l}^{2} & \text{при } q=p_{\perp},\end{cases} \tag{3}$$

$$g_{l_1}\equiv j_{l_1}(\omega r)-\Omega_{\lambda l}(\omega a)\, n_{l_1}(\omega r),\quad \varepsilon-p-2p_{\perp}=0.$$

При этом $S_{\lambda l}(a, R, \omega_n)=0, 1, 2,\cdots$ (см. [3]). В (2) ω пробегает дискретный набор значений ω_n, определяемый уравнениями $\Omega_{\lambda l}(\omega_n R)=\Omega_{\lambda l}(\omega_n a)$, которые вытекают из условий обращения в нуль соответствующих компонент напряженностей электромагнитного поля на идеально проводящих обкладках конденсатора;

$$\Omega_{\lambda l}(x)=\begin{cases}j_l(x)/n_l(x) & \text{при } \lambda=0\\ [xj_l(x)]'/[xn_l(x)]' & \text{при } \lambda=1.\end{cases} \tag{4}$$

Для регуляризации расходящихся величин (4) введем произвольный обрезающий множитель $\psi_{\mu}(\omega, l)$ (μ — параметр обрезания, $\psi_0=1$) такой, чтобы все суммы стали конечными. Задача теперь сводится к вычислению предела

$$\operatorname{reg}\langle 0|\tau_{ik}|0\rangle=\lim_{\mu\to 0}[\langle 0|\tau_{ik}|0\rangle-\langle\bar{0}|\tau_{ik}|\bar{0}\rangle], \tag{5}$$

где $|\bar{0}\rangle$ — амплитуда состояния вакуума в пространстве без проводников.

Нужно доказать также, что (5) не зависит от вида ψ_{μ}, фигурирующего в промежуточных расчетах. Для этого воспользуемся формулой

$$\sum_{\omega_n\geqslant 0}\frac{f(\omega_n)}{s'(\omega_n)}=w+\int_0^{\infty}f(x)\,dx+i\int_0^{\infty}\left\{\frac{f(ix)}{\exp[-2\pi is(ix)]-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(-ix)}{\exp[2\pi is(-ix)]-1}\right\}dx, \tag{6}$$

$$w=\begin{cases}0, & \text{если } s(0)\neq 0, \pm 1, \pm 2,\cdots\\ f(0)/2s'(0), & \text{если } s(0)=0, \pm 1, \pm 2,\cdots,\end{cases}$$

в которой суммирование проводится по всем ω_n, для которых $s=0, 1, 2\cdots$ $(s'(\omega_n)\neq 0)$, а функции $s(z)$ и $f(z)$ аналитичны в области $x\geqslant 0$ $(z=x+iy)$ и удовлетворяют условию

$$f(z)\{1-\exp[-2\pi is(z)\operatorname{sgn}(y)]\}^{-1}\to 0, \tag{7}$$

когда $y\to\pm\infty$ (равномерно по $x\geqslant 0$) и $x\to+\infty$. Ее нетрудно доказать. Заметим, что она обобщает известную формулу суммирования Абеля-Плана (случай $s(z)=z$).

Регуляризуя (2) с помощью (6), получим

$$\operatorname{reg} q = q^{out}(a, r) + q^{(aR)}(r),\ \operatorname{reg}\tau_i^i = 0, \tag{8}$$

$$q^{out} = -\frac{1}{4\pi^3 a^4}\lim_{\mu\to 0}\sum_{\lambda l}\int\limits_0^\infty z^3\chi_\mu\left(\frac{z}{a}\right)\Omega_{1\lambda l}(z)\,\varkappa_l^{(q)}(zx)\,dz, \tag{9}$$

$$q^{(aR)} = -\frac{1}{4\pi^3 R^4}\lim_{\mu\to 0}\sum_{\lambda l}\int\limits_0^\infty z^3\frac{\chi_\mu(z/R, l)\,F_{\lambda l}^{(q)}(z\sigma, zy)}{\Omega_{1\lambda l}(z)-\Omega_{1\lambda l}(z\sigma)}\,dz. \tag{10}$$

Здесь $x=r/a>1$, $y=r/R<1$, $\sigma=a/R$; $\Omega_{1\lambda l}$ определяется выражениями (4) для $\Omega_{\lambda l}$, если в них j_l и n_l заменить соответственно на модифицированные сферические функции Бесселя I и III родов $(i_l(z)=\sqrt{\pi/2z}\,I_{l+1/2}(z)$, $k_l(z)=\sqrt{\pi/2z}\,K_{l+1/2}(z))$; $\chi_\mu(z, l)\equiv[\psi_\mu(iz, l)+\psi_\mu(-iz, l)]/2$ и, наконец, $\varkappa_l^{(q)}$ и $F_{\lambda l}^{(q)}$ задаются выражениями

$$\begin{aligned}&l\eta_{l+1}^2+(l+1)\eta_{l-1}^2-(2l+1)\eta_l^2 &&\text{при } q=\varepsilon,\\ &l(l+1)(2l+1)\eta_l^2/s^2 &&\text{при } q=p_\perp;\end{aligned} \tag{11}$$

для $\varkappa_l^{(q)}(s)$ функция $\eta_l\equiv k_l(s)$, а для $F_{\lambda l}^{(q)}(t, s)$ $\eta_{l_1}\equiv i_{l_1}(s)-(-1)^{l+l_1}\times$ $\times\,\Omega_{1\lambda l}(t)\,k_{l_1}(s)$.

Выражение (9), описывающее свойства вакуума вне проводящего шара радиуса a (см. ниже), для частного вида обрезающей функции $\psi_\mu=\exp(-\mu\omega)$ выведено в [6] другим способом. С помощью известных разложений функций i_l и k_l [11] нетрудно убедиться, что в (9) и (10) интегралы и суммы по l сходятся настолько быстро, что к пределу $\mu\to 0$ можно переходить непосредственно в $\chi_\mu(\omega, l)$. Следовательно, результат регуляризации не зависит от вида функции $\psi_\mu(\omega, l)$ и поэтому символ lim можно опустить, полагая $\chi_\mu=1$.

При $R\to\infty$ в (8) $q^{(aR)}\to 0$, поэтому $q^{out}(a, r)$ описывает компоненты $\operatorname{reg}\tau_{ik}$ вне идеально проводящего шара радиуса a. В случае $a\to 0$ мы имеем дело с полостью радиуса R в идеальном проводнике:

$$\lim_{a\to 0}\operatorname{reg} q = \lim_{a\to 0} q^{(aR)} \equiv q^{in}(R, r). \tag{12}$$

Выражение для q^{in} элементарно вытекает из (10) (см. также [6]). Формально оно получается из (9), если сделать замены: $i_l\rightleftarrows k_l$, $a\to R$ и $x\to y$. Предел $a\to R$ соответствует конфигурации с двумя параллельными пластинами. В этом случае в (9) и (10) в суммы по l основной вклад дают большие l, что позволяет воспользоваться равномерн ыми асимпто тическими разложениями для i_l и k_l [11]. Простые вычисления приводят к известному результату Казимира [1, 2].

Нетрудно показать, что внутри сферической полости, вне проводящего шара и внутри сферического слоя между проводниками τ_{ik} (ниже символ reg опускаем) удовлетворяет уравнению $\tau^k_{i;k}=0$. Здесь оно имеет вид

$$p'(r)+2(p-p_\perp)/r=0. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь сферический конденсатор с бесконечно тонкими обкладками. В этом случае справедливы «обычные» равенства

$$f_R(a)=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial E(a,R)}{\partial a},\; f_a(R)=-\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial E(a,R)}{\partial R}, \tag{14}$$

где E — полная энергия вакуума (проинтегрированная от центра конденсатора до бесконечности), а $f_R(a)$ и $f_a(R)$ — силы, действующие на единицу поверхности соответственно внутренней и внешней обкладок конденсатора. Аналогичная формула ($f_0(a)=-(1/4\pi a^2)\,dE_0/da=0{,}04618/4\pi a^4$) для отдельной сферической поверхности радиуса a выведена в [6].

Уравнения (14) можно доказать с помощью равенств

$$E=4\pi[a^3 f_R(a)+R^3 f_a(R)],$$

$$\Delta f_R(a)\equiv f_R(a)-f_0(a)=\frac{\sigma^2}{16\pi a^4}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\int_0^{\infty} z\times$$

$$\times\left\{\frac{e_l(z)/e_l(z\sigma)}{s_l(z)\,e_l(z\sigma)-s_l(z\sigma)\,e_l(z)}-\frac{[1+l(l+1)/z^2\sigma^2]\,e'_l(z)/e'_l(z\sigma)}{s'_l(z)\,e'_l(z\sigma)-s'_l(z\sigma)\,e'_l(z)}\right\}dz, \tag{15}$$

$$\Delta f_a(R)\equiv f_a(R)-f_0(R)=-\frac{1}{16\pi R^4}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\int_0^{\infty} z\times$$

$$\times\left\{\frac{s_l(z\sigma)/s_l(z)}{s_l(z)\,e_l(z\sigma)-s_l(z\sigma)\,e_l(z)}-\frac{[1+l(l+1)/z^2]\,s'_l(z\sigma)/s'_l(z)}{s'_l(z)\,e'_l(z\sigma)-s'_l(z\sigma)\,e'_l(z)}\right\}dz,$$

$$s_l(z)\equiv z i_l(z),\; e_l(z)\equiv z\,k_l(z),$$

которые вытекают из (8)—(10) и (13). В [9] также выведена формула для $f_R(a)$. После вычитания $f_0(a)$ и упрощений она сводится к $\Delta f_R(a)$ в (15). Формулу для E можно легко обобщить на случай произвольного числа концентрических сфер.

Величины q^{out}, q^{in} рассчитаны в [8]. Для упрощения расчетов авторы заменили i_l, k_l соответствующими асимптотическими разложениями, справедливыми при $l\gg 1$. Мы заново рассчитали q^{out}, q^{in}, используя точные выражения для i_l, k_l. Результаты этих расчетов показывают, что относительная ошибка данных, приведенных в [8], составляет $\sim 10\%$. В табл. 1 приведены результаты вычислений $\Delta q=q^{(aR)}(r)-q^{in}(R,r)$ в зависимости от r для ряда значений $\sigma=a/R$. При $a<R$ значения $\Delta\varepsilon$, Δp, $\Delta p_\perp$ конечны для всех $a\leqslant r\leqslant R$. В [9] вычислена сила $f_R(a)$ тем же приближенным методом, что и в [8]. В табл. 2

приведены результаты наших расчетов $f_R(a)$ с использованием точных значений i_l, k_l. Относительная погрешность данных [9] достигает 10%. В табл. 2 приведены также значения $f_a(R)$. Заметим, что при $a/R \approx 0{,}2$ сила $f_a(R) = 0$. По формуле, приведенной в (15), можно вычислить $E(a, R)$. Полная энергия вакуума оказывается отрицательной при $0{,}39 \leqslant a/R < 1$. Напомним, что значение $\lim\limits_{a \to 0} aE = aE_0 = 0{,}0462$ было найдено ранее в [3 — 6].

Таблица 1

a/R	$(r-a)/(R-a)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
0,1	$-10^4 R^4 \Delta p$	4232	587	187	83,6	45,2	27,4	18,2	9,42	5,67
	$-10^4 R^4 \Delta \varepsilon$	−932	8,78	15,7	11,7	8,81	6,76	5,46	3,74	2,72
0,3	$-10^2 R^4 \Delta p$	61,5	32,7	19,8	13,0	9,09	6,64	5,05	3,16	2,14
	$-10^2 R^4 \Delta \varepsilon$	−4,28	1,80	2,58	2,44	2,15	1,86	1,62	1,25	0,998
0,5	$-10 R^4 \Delta p$	14,7	11,2	8,76	7,02	5,72	4,74	3,99	2,92	2,23
	$-10 R^4 \Delta \varepsilon$	1,35	1,72	1,75	1,67	1,55	1,43	1,32	1,13	0,976
0,6	$-10 R^4 \Delta p$	29,8	24,7	20,9	17,9	15,4	13,4	11,8	9,26	7,45
	$-10 R^4 \Delta \varepsilon$	4,73	4,98	4,90	4,69	4,44	4,18	3,94	3,49	3,14
0,7	$-R^4 \Delta p$	7,89	7,03	6,29	5,66	5,12	4,46	4,23	3,56	3,03
	$-R^4 \Delta \varepsilon$	1,71	1,71	1,67	1,62	1,55	1,49	1,43	1,31	1,22
0,8	$-R^4 \Delta p$	34,1	31,9	29,9	28,0	26,4	24,8	23,4	20,9	18,8
	$-R^4 \Delta \varepsilon$	9,03	8,94	8,77	8,57	8,35	8,11	7,90	7,49	7,15

Таблица 2

a/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\Delta f_R(a)/f_0(a)$	0	0,0119	0,216	1,39	6,28	25,4	106	518	3810
$\Delta f_a(R)/f_0(R)$	0	−0,158	−1,42	−5,83	−19,3	−61,2	−204	−826	−5120

Отметим, что расходимости q^{out} и q^{in} на поверхности идеального проводника обусловлены соответствующими граничными условиями. В реальных условиях существует конечная глубина проникновения поля в проводник. При высоких частотах вещество становится прозрачным, и поэтому вклад в (8) мультиполей с $\omega \gg \omega_0$ (ω_0 — некоторая характерная частота) должен быть пренебрежимо мал. В этом случае отличия q^{out} и q^{in} от (9) и (12) будут иметь место у поверхности проводников в слое толщиной порядка ω_0^{-1}, а Δq останется в силе, если $(R-a) \gg \omega_0^{-1}$. В [12 — 14] более подробно обсуждена природа расходимостей q^{out} и q^{in} и возможные способы их устранения.

Авторы признательны Г. С. Саакяну за интерес к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Casimir H. B. G.* Proc. Kon. Ned. Acad. Wetenschap., 51, 793 (1948).
2. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Атомиздат, М., 1980.

3. *Boyer T. H.* Phys. Rev., 174, 1764 (1968).
4. *Davies B.* J. Math. Phys., 13, 1324 (1972).
5. *Balian R., Duplantier B.* Ann. Phys. (N. Y.), 112, 165 (1978).
6. *Milton K. A., DeRaad L. L., Schwinger J.* Ann. Phys. (N. Y.). 115, 388 (1978).
7. *Olaussen K., Ravndal F.* Nucl. Phys., B192, 237 (1981).
8. *Brevik I., Kolbenstvedt H.* Ann. Phys.(N. Y.). 149, 237 (1983); Can. J. Phys., 62, 805 (1984).
9. *Brevik I.* Can. J. Phys., 61, 493 (1983).
10. *Brevik I., Kolbenstvedt H.* Can. J. Phys., 63, 1409 (1985).
11. *Абрамовиц М., Стиган И. А.* Справочник по специальным функциям. Изд. Наука, М., 1979.
12. *Deutsh D., Candelas P.* Phys. Rev., D20, 3063 (1979).
13. *Kennedy G.* Ann. Phys. (N. Y.), 138, 353 (1982).
14. *Candelas P.* Ann. Phys. (N. Y), 143, 241 (1982).

ՖՈՏՈՆԱՅԻՆ ՎԱԿՈՒՈՒՄԸ ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԳՏՆՎՈՂ ՍՖԵՐԻԿ ՇԵՐՏՈՒՄ

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Գտնված են էլեկտրամագնիսական վակուումի վերանորմավորված էներգիայի-իմպուլսի թենզորի բաղադրիչները սֆերիկ կոնդենսատորի ներսում։ Ապացուցված են այդ թենզորի մի շարք հատկություններ։ Հաշված են կոնդենսատորի անվերջ բարակ, իդեալական հաղորդիչ թիթեղների վրա ազդող վակուումային ուժերը, ինչպես նաև վակուումի լրիվ էներգիան։

PHOTON VACUUM IN A SPHERICAL LAYER BETWEEN PERFECTLY CONDUCTING SURFACES

L. SH. GRIGORYAN, A. A. SAHARYAN

The components of renormalized energy-momentum tensor are calculated for the electromagnetic vacuum in a spherical capacitor. Some properties of this tensor are established. The forces acting on infinitely thin, perfectly conducting plates of the capacitor as well as the total energy of the vacuum inside and outside the capacitor are calculated.