

УДК 530.145:517.53

К ФОРМУЛЕ СУММИРОВАНИЯ АБЕЛЯ-ПЛАНА

А. А. СААРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 26 июня 1985 г.)

Произведено обобщение теоремы суммирования Абеля-Плана, позволяющее выполнить суммирование по целочисленным значениям заданной функции. Полученная в результате обобщения формула существенно облегчает расчеты вакуумных эффектов для различных конфигураций тел. Вычислен эффект Казимира для идеально проводящей сферической поверхности.

В теории функций комплексной переменной формула Абеля-Плана известна довольно давно [1, 2]. Ее используют при исследовании аналитических свойств функций, заданных в виде рядов, а также для нахождения сумм рядов в конечном виде [2, 3]. В последние годы появились интересные применения этой формулы в теории квантованных полей. В работе [4] она была использована для перенормировки тензора энергии-импульса скалярного поля в различных фридмановских моделях Вселенной. При этом она оказалась весьма эффективной. Позднее формула Абеля-Плана стала применяться также при вычислении вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованных полей в различных полных и неполных многообразиях (эффект Казимира). Подробное изложение этих вопросов можно найти в [5, 6].

Вместе с тем в ряде случаев (эффект Казимира для сферы и другие задачи) возникают определенные трудности, связанные с нарушением свойств аналитичности функции, фигурирующей в формуле Абеля-Плана. В связи с этим возникает необходимость видоизменения этой формулы. Ниже дан один из вариантов ее обобщения.

Пусть в полосе $A < x < B$ комплексной плоскости $z = x + iy$ задана аналитическая функция $s(z)$. Обозначим через z_n ($n = 1, 2, \dots, N$) точки этой полосы, в которых $s(z)$ принимает целочисленные значения. Будем предполагать, что производная $s'(z_n) \neq 0$ и что $y_n \neq \infty$ для всех n .

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в области $A < x < B$ и удовлетворяет там условию

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} f(z) [1 - \exp[-2\pi i s(z) \operatorname{sgn}(y)]]^{-1} = 0 \quad (1)$$

равномерно по области $A < x < B$, то верна формула

$$\sum_{n=1}^N \frac{f(z_n)}{s'(z_n)} = \int_a^b f(x) dx + \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\operatorname{sgn}(y) f(u)}{1 - \exp[-2\pi i s(u) \operatorname{sgn}(y)]} \Big|_{u=a+s}^{u=b+s} dz, \quad (2)$$

где a и b — любые числа, для которых $A < a < x_n < b < B$.

Заметим, что условие (1) удовлетворяется, если

$$f(z) \leq \text{const } e^{\sigma|y|}, \quad \sigma < 2\pi; \quad |\operatorname{Im} s(z)| > |y|, \quad \operatorname{Im} s(z) \rightarrow \pm \infty, \quad \text{когда } y \rightarrow \pm \infty. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим через C_h прямоугольник с вершинами $a \pm ih$, $b \pm ih$, $h > \max |y_k|$, $k = 1, 2, \dots, N$. Согласно теореме о вычетах

$$J \equiv \int_{\partial C_h} f(z) \operatorname{ctg} \pi s(z) dz = 2i \sum_{n=1}^N \frac{f(z_n)}{s'(z_n)}, \quad (4)$$

где граница ∂C_h обходится против часовой стрелки. Используя аналитичность функции $f(z)$, нетрудно проверить равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{-ih} f(u) \{ \operatorname{ctg} [\pi s(u)] - i \}_{u=a-b+i\pi}^{u=a-b+i\pi} dz + \int_{a-ih}^{b-ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi s - i) dz + \\ & + 2i \int_a^b f(x) dx - \int_0^{ih} f(u) \{ \operatorname{ctg} [\pi s(u)] + i \}_{u=a-b+i\pi}^{u=a-b+i\pi} dz - \\ & - \int_{a+ih}^{b+ih} f(z) (\operatorname{ctg} \pi s + i) dz = J. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом из условия (1) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{a \pm ih}^{b \pm ih} f(z) \{ \operatorname{ctg} [\pi s(z)] \pm i \} dz = 0. \quad (6)$$

Для вывода (2) достаточно теперь в (4) и (5) перейти к пределу и воспользоваться равенством (6).

Следствие. Если функции $s(z)$ и $f(z)$ аналитичны в полуплоскости $x > 0$ и наряду с (1) имеет место условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(z) [1 - \exp[-2\pi i s(z) \operatorname{sgn}(y)]]^{-1} = 0, \quad (7)$$

то

$$\begin{aligned} \sum \frac{f(z_n)}{s'(z_n)} = & w + \int_0^\infty f(x) dx + \int_0^\infty \left\{ \frac{f(it)}{\exp[-2\pi i s(it)] - 1} - \right. \\ & \left. - \frac{f(-it)}{\exp[2\pi i s(-it)] - 1} \right\} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$w = \begin{cases} 0, & \text{если } s(0) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ f(0)/[2s'(0)], & \text{если } s(0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \end{cases}$$

Доказательство не представляет особого труда. Достаточно в общей формуле (2) положить $b, B \rightarrow +\infty$, $a, A \rightarrow +0$ и воспользоваться условием (7). Приведенная в [2] формула Абеля-Плана получается из (8) при $s(z) = z$.

Рассмотрим применение обобщенной формулы Абеля-Плана при расчете эффекта Казимира внутри идеально проводящей сферы. Для плотности энергии электромагнитного вакуума имеем

$$\varepsilon(a, r) = \frac{1}{8\pi a^3} \sum_{l, \lambda, k} \frac{k D_l(kr)}{j_l^2(ka) - j_{l-1}(ka) j_{l+1}(ka)}, \quad (9)$$

где r — радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы, a — радиус сферы (принята система единиц $\hbar = c = 1$). Здесь введено обозначение

$$D_l(x) \equiv j_{l+1}^2(x) + (l+1) j_{l-1}^2(x) + (2l+1) j_l^2(x),$$

$j_l(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{l+1/2}(x)$ — сферическая функция Бесселя. В формуле (9) суммирование ведется по значениям полного момента $l=1, 2, \dots$ фотона, по двум его независимым поляризациям ($\lambda=0$ для фотонов магнитного типа и $\lambda=1$ для фотонов электрического типа), по волновому числу k , пробегающему дискретный набор значений, определяемый уравнениями

$$j_l(ka) = 0 \quad \text{при } \lambda=0, \quad (10)$$

$$d[rj_l(kr)]/dr|_{r=a} = 0 \quad \text{при } \lambda=1. \quad (11)$$

Они вытекают из граничных условий для напряженностей электромагнитного поля на поверхности идеально проводящей сферы.

Вакуумное среднее $\varepsilon(a, r)$ расходится. Расходится оно и в пустом пространстве без проводников. Стандартная процедура перенормировки предполагает введение в расходящуюся сумму (9) обрезавшей функции $\psi(\mu k)$ (μ — параметр обрезания). При этом сумма становится конечной. Затем нужно показать, что при устремлении μ к нулю выражение

$$\text{reg } \varepsilon(a, r) = \lim_{\mu \rightarrow 0} [\varepsilon(\mu, a, r) - \varepsilon(\mu, \infty, r)] \quad (12)$$

не зависит от вида функции ψ , если выполняются $\psi(0) = 1$ и $\psi(\infty) = 0$.

Для доказательства этого рассмотрим функцию

$$s_{\lambda l}(z) = \begin{cases} -(1/\pi) \arctg [j_l(z)/n_l(z)], & \lambda=0 \\ -(1/\pi) \arctg \{[zj_l(z)]'/[zn_l(z)]'\}, & \lambda=1, \end{cases} \quad (13)$$

где n_l — сферическая функция Неймана. Она позволяет в (9) суммирование по k заменить суммированием по целочисленным значениям функции $s_{\lambda l}(ka)$. Расходящееся выражение (9) теперь можно заменить конечной величиной

$$\varepsilon(\mu, a, r) = \frac{1}{8\pi^2 a^4} \sum_{n, \lambda, l} \psi\left(\frac{\mu}{a} z_n\right) \frac{z_n^3 D_l(x z_n)}{s'_{\lambda l}(z_n)}, \quad (14)$$

в которой суммирование ведется по всем z_n , таким, что $s_{\lambda l}(z_n) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Нетрудно показать, что формулу (8) можно применить к выражению (14). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu, a, r) = & \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\lambda, l} \left\{ \int_0^{\infty} k^3 \psi(\mu k) D_l(kr) dk + \right. \\ & \left. + \frac{2}{a^4} \int_0^{\infty} \frac{z^3 \chi\left(\frac{\mu}{a} z\right) D_l(izx)}{\exp[-2\pi i s_{\lambda l}(iz)] - 1} dz \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\chi(y) = (1/2) [\psi(iy) + \psi(-iy)].$$

Процедура перенормировки (12) сводится к отбрасыванию первого интеграла в (15). Нетрудно показать, что второй интеграл сходится настолько быстро, что в нем обрезание можно снять, положив $\mu = 0$. Следовательно, результат расчетов не зависит от вида $\psi(\mu k)$. Введя модифицированные сферические функции Бесселя i_l и k_l (см. [7]), для регуляризованной величины (12) окончательно получаем выражение

$$\begin{aligned} \text{reg } \varepsilon(a, r) = & -\frac{1}{4\pi^3 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} z^3 \left\{ \frac{k_l(z)}{i_l(z)} + \frac{[zk_l(z)]'}{[zi_l(z)]'} \right\} [i_{l+1}^2(zx) + \\ & + (l+1) i_{l-1}^2(zx) - (2l+1) i_l^2(zx)] dz. \end{aligned}$$

Мы рассмотрели сумму по нулям сферических функций Бесселя. Аналогичным образом при подходящем выборе $s(z)$ можно проводить суммирование по нулям некоторых других функций.

Автор признателен Г. С. Саакяну и Л. Ш. Григоряну за интерес к работе и ценные стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindelof E. Le Calcul des Residus. Gauthier-Villars, 1905.
2. Евграфов М. А. Аналитические функции. Изд. Наука, М., 1968.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I. Изд. Наука, М., 1973.
4. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А. ЖЭТФ, 70, 1577 (1976).
5. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интегральных полях. Атомиздат, М., 1980.
6. Де Витт Б. С. Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени. В сб. «Черные дыры». Изд. Мир, М., 1978.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. Изд. Наука, М., 1979.

ԱՐԵԼ-ՊԼԱՆԱՅԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԲԱՆԱԶԵՎԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Բնդհանրացվում է Արել-Պլանայի դաժարման թեորեմը, որը հնարավորություն է տալիս կատարել դաժարում ըստ տվյալ ֆունկցիայի ամբողջ արժեքների: Ստացված բանաձևերը էապես հեշտացնում են մակրոսկոպիկ մարմինների տարրեր կոնֆիգուրացիաների համար վակուումային երևույթների հաշվարկները: Դիտարկված է Կազիմիրի երևույթը իզոբալական հազարիչ աֆերիկ մակերևույթի համար:

TO THE FORMULA OF ABEL-PLANA SUMMATION

A. A. SAHARYAN

The generalization of Abel-Plana summation theorem allowing to perform the summation over the integral values of some given function was made. The obtained formula was shown to essentially simplify the calculation of vacuum effects for bodies of different configurations. The theorem was used for the calculation of Casimir effect in perfectly conducting spherical shell.