УДК 537.612.2;632/636

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ С МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

В. Л. ЭКЕЛЕКЯН, М. А. ПЛУЗЯН, Р. С. ОГАНЕСЯН

Ереванский государственный медицинский институт

(Поступила в редакцию 5 декабря 1984 г.)

Рассмотрено движение частиц — одводсменных ферромагнетиков с постоянным по модулю магнитным моментом — в неоднородном поле магнитного диполя. Движение таких частиц по определенным поверхностям и плоскостям изучено аналитически в виде легко вычисляемых квадратур эллиптических интегралов. Детально рассмотрено движение ферромагнитной частицы в районе экваториальной по отношению к магнитному диполю плоскости. Проведен численный анализ некоторых пространственных траекторий, в частности, в меридианных плоскостях. Для ряда траекторий изучен вопрос их устойчивости.

Движение частиц с магнитным моментом во внешних магнитных полях различных конфигураций представляет определезный теоретический и практический интерес. Под частицей с магнитным можентом подразумевается не только атом, молекула или ядро, но и феррочастица с размерами порядка 3—15 нм. В последнее время из совокупности вышеуказанных феррочастиц получают так называемые магнитные жидкости в виде двухфазной жидкости, состоящей из немагнитной жидкости (носителя) и диспергированных в ней феррочастиц. Магнитные жидкости имеют разнообразные технические применения. Они используются также в практической медицине для направленного переноса лекарственных препаратов и локального прогрева живых организмов при наличии постоянных и переменных магнитных полей.

Поведение магнитных жидкостей (феррожидкостей) во внешних магнитных полях описывается системой уравнений ферромагнитогидродинамики [1, 2]. Однако в очень разреженной феррожидкости движение частиц происходит независимо друг от друга, и изучение поведения отдельной частицы во внешних магнитных полях даже при неучете сил гидродинамического сопротивления необходимо для выявления характерных особенностей такого движения.

При отсутствии токов и наличии постоянного магнитного поля **B**, как правило, предполагают, что магнитный момент μ феррочастицы всегда направлен по полю, $\mu = \mu B/B$. При таком предположении действующая на феррочастицу сила есть $\mathbf{F} = (\mu \nabla) \mathbf{B}$ [3], и при условии $|\mu| = \text{const}$ она принимает вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu \text{ grad } B. \tag{1}$$

.200

В сферической системе координат (*r*, θ, φ) с началом отсчета в центре диполя и с осью, коллинеарной вектору магнитного момента **a**, имеем

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \psi, \psi = (\mathbf{ar})/r^3 = ar^{-2}\cos\theta,$$

где

$$B = \{B_r^2 + B_{\theta}^2 + B_{\varphi^{\dagger}}^{2+1/2} = a\Phi/r^3, \ \Phi = (1+3\cos^2\theta)^{1/2}, \\ \text{grad } B = -3ar^{-4} \ [\Phi; \ (2\Phi)^{-1}\sin 2\theta; \ 0].$$

Приведем геометрические характеристики магнитного поля диполя: а) уравнения магнитных силовых линий: $r = C \sin^3 \theta \, tg \, \theta$, $\varphi = \text{const}$ (C – произвольная постоянная); б) угол α между силовой линией и радиусом-вектором r (см. рис. 1) удовлетворяет условию $tg \alpha = \sin 2\theta \times (5 + 3s)^{-1}$, $s = \cos 2\theta$; в) уравнения поверхностей постоянной по ве-

Рис. 1. Магнитные силовые линии (α^{i} , угол а между раднусом-вектором г и магнитной силовой линией F, поверхности постоянной по величине силы F(s) и эквипотенциальные поверхности (δ) поля магнитного диполя a (срезы $\varphi = \text{const}$).



личине силы $F: r = A [(4s^2 + 15s + 13)/(5 + 3s)]^{1/8}$, F = const, где $A = (3a\mu/F)^{1/4}$, $\varphi = \text{const}$; г) уравнения эквипотенциальных поверхностей $r = -(\mu a/\sqrt{2} U)^{1/3} (5 + 3s)^{1/6}$, U = const, $\varphi = \text{const}$. На рис. 1 схематически изображены магнитные силовые линии и соответствующие срезы поверхностей постоянной по величине силы и эквипотенциальных поверхностей.

С целью нахождения интегралов движения представим функцию Лагранжа рассматриваемой задачи в сферических и цилиндрических координатах:

$$L=T-U$$

 $2T/m = \dot{r^3} + r^2\theta^3 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi^3}, \ U = -\mu a r^{-3}(1+3\cos^2\theta)^{1/2},$

$$2T/m = \rho^2 + \rho^2 \phi^2 + z^2, \ U = -\mu \alpha (\rho^2 + 4z^2)^{1/2} / (\rho^2 + z^2)^2.$$

Существуют два интеграла движения: полная энергия E₀ и проекция механического момента импульса M на ось, совпадающую с осью а магнитного диполя для феррочастицы:

$$E_0 = T + U = \text{const}, (Ma)/a = M_0 = \text{const}.$$

С учетом этих законов сохранения уравнения движения (1) представим в виде

$$\dot{r}^{2} + r^{2}\ddot{\theta}^{2} = \frac{2E_{0}}{m} - \frac{M_{0}^{2}}{m^{2}r^{2}\sin^{2}\theta} + \frac{2\mu a}{mr^{3}}\sqrt{1+3\cos^{2}\theta},$$
(3)

 $\phi = M_0/(mr^2 \sin^2 \theta)$

в сферической системе координат и

$$\dot{\varphi}^{2} + z^{2} = 2E_{0}/m - M_{0}^{2}/(m\varphi)^{2} + \frac{2\mu a}{m} \frac{1/\varphi^{2} + 4z^{2}}{(\varphi^{2} + z^{2})^{2}},$$

$$\dot{\varphi} = M_{0}/(m\varphi^{2})$$
(4)

в цилиндрической системе координат.

Уравнения движения феррочастицы с постоянным по величине магнитным моментом в поле магнитного диполя аналитически в общем случае не интегрируются. Исследуем движение магнетика по цилиндрическим поверхностям и в районе экваториальной по отношению к магнитному диполю плоскости, как это традиционно делается в задачах космической электродинамики при рассмотрении движения заряженных частиц в поле магнитного диполя [4]. Заметим, что в случае движения феррочастицы по меридианной по отношению к магнитному полю поверхности получаются уравнения ($\phi = \text{const}, \phi = 0$)

$$4z^{3} \ddot{\rho} = \rho \left(\rho^{2} + 5z^{2} \right) \ddot{z},$$
(5)

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = 2E_0/m + (2\mu a/m) \sqrt{\rho^2 + 4z^2} / (\rho^2 + z^2)^2,$$

которые известными методами аналитически не интегрируются.

1. Возможное движение магнетика по цилиндрическим поверхностям описывается уравнениями (в (4) следует положить $\rho = R$, $\rho = 0$)

$$\dot{z} = \left\{ \frac{2E_0}{m} - \frac{M_0^2}{m^2 R^2} + \frac{2\mu a}{m R^3} \frac{\sqrt{1 + 4(z/R)^2}}{[1 + (z/R)^2]^2} \right\}^{1/2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{M_0}{m R^2} = \text{const.}$$

При условии x = z/R < 1 эта система уравнений интегрируется и получается следующая зависимость между цилиндрическими координатеми:

$$F(\arccos \sqrt{c/d} z; 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2cd} mR^{2} (\varphi - \varphi_{0})/M_{0},$$

$$d^{2} = 2E_{0}/m + 2\mu a/mR^{3} - M_{0}^{2}/(mR)^{2},$$

$$c^{2} = 6\mu a/mR^{3},$$
(6)

где F — нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Если в разложении Маклорена для функции $f(x) = \sqrt{1 + 4x^2}/(1 + x^2)^2$ ограничиться точностью 10⁻⁵, то это эквивалентно неравенству R > > 10z. Решение (6) показывает, что движение магнетика в неоднородном поле магнитного диполя по цилиндрической поверхности представляет собой колебания с частотой $\omega = \sqrt{2cd} mR^2/(2M_0K(1/\sqrt{2}))$ (K — полный эллиптический интеграл) в полосе |z| < 0,1 R.

В качестве численной иллюстрации рассмотрим частный случай с начальными параметрами: $R_0 = 3\mu\alpha m/M_0^2$,

$E_0 = 801 a \mu/2048 R_0^3, d^2 = a \mu/(1024 m R_0^3), (d/c)^{1/2} = (R/2)/750.$

Тогда уравнение траектории (6) примет вид: $F(\arccos 2\sqrt[4]{750} z/R;$ $1/\sqrt{2}) = (\varphi - \varphi_0)/2\sqrt[4]{30}$. Это есть кривая на цилиндрической поверх" ности, не выходящая за рамки полосы $|z| \leq 0,0955 R$ около экваториальной плоскости, которая через каждые $\varphi = 994^{\circ}28'$ значения угла долготы, не замыкаясь, повторяет себя, т. е. $\omega = 0,214$ рад/с.

2. Рассмотрим подробно характерные особенности движения магнетика в экваториальной по отношению к магнитному диполю плоскости: $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$. В этом случае из системы уравнений (3) получаем

$$\dot{r} = [2E_0/m + 2\mu a/mr^3 - M_0^2/(mr)^2]^{1/2}, \ \dot{\varphi} = \frac{M_0}{mr^3}$$
 (7)

Введем характерный радиус $r_0 = 3\mu am M_0^{-2}$ и безразмерный радиус $\xi = r/r_0$ и перепишем уравнение (7) в безразмерных единицах:

$$= (M_0/mr_0^2) \sqrt{2(E^* - U_{\rm eff}^*(\xi))}, \ \dot{\varphi} = M_0/(mr_0^2\xi^2), \tag{8}$$

где $E^* = mr_0^2 E/M_0^2$ и $U_e = U_{eff}^*(\xi) = \xi^{-2}/2 - \xi^{-3}/3$ представляют собой соответственно безразмерную полную и эффективную энергии феррочастицы. Графическая зависимость эффективной потенциальной энергии U_e от параметра ξ представлена на рис. 2. Из общего рассмот-



Рис. 2. Зависимость безразмерной эффективной энергик Ue от безразмерного раднуса §. рения следует, что при $E^* >$ >1/6 частица в экваториальной плоскости участвует в инфинитном движении, в случае $0 < E^* < 1/6$ существуют как финитные, так и инфинитные ветви траектории и, наконец,



Рис. 3. Финитные траекторви феррочастицы в неоднородном поле магвитного диполя, соответствующие сле дую щим значениям приведенной полной энергии: a_1 , a_2) $E^*=1/6$; 6) $E^*=$ = 0; e) $E^* = -9/2$; i) $E^* = 9/64$. при $E^* \leq 0$ везможно только финитное движение в пределах $\xi \leq \xi_0$, где ξ_0 — корень уравнения $U_*(\xi_0) = E^*$. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

a) E*>1/6, например, E*=5/6. Тогда из (8) получаем уравнение траектории

$$\int d\eta \{ E^* - U_*(\eta) \}^{-1/2} = \sqrt{2} \ (\varphi_0 - \varphi), \ \eta = 1/\xi,$$

где $U_{\epsilon}(\eta) = \eta^2/2 - \eta^3/3$. После интегрирования имеем

$$F(\arccos \psi; k) = \sqrt[4]{\frac{8}{3}} (\varphi_0 - \varphi), \ \psi = (\sqrt[4]{6} - 1 - \eta)/(\eta + 1 + \sqrt{6}), k^2 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{16}.$$
(9)

Это — инфинитная траектория, которая имеет две симметричные асимптоты под углами $\varphi_1 = 82^\circ$ и $\varphi_2 = 278^\circ$ по отношению к полярной оси. У полюса траектория делает самозамыкающийся виток є осью симметрии под углом 55°. При $E^* \to \infty$ разность $|\varphi_1 - \varphi_2| \to 180^\circ$.

б) E* = 1/6. Уравнение траектории

$$\int d\eta \{ |\eta - 1| \sqrt{2\eta + 1} \}^{-1} = (\varphi_0 - \varphi) / \sqrt{3};$$

решения: $r = r_0$ или $r = r_0 (1 + e^{\varphi})^2 / (1 + 4e^{\varphi} + e^{2\varphi}).$

Это — две траектории: первая — окружность, вторая — логарифмическая спираль, которая при эволюции движения вырождается в окружность $r = r_0$ (см. рис. 3).

в) $0 < E^* < 1/6$, например, $E^* = 9/64$ ($\xi_0^{-1} = 0.75$ — точка перегиба кривой $U_e = U_e(\xi)$: $U_e(\xi_0) = 9/64$). Решение

$$F(\arccos \psi; k) = \tau (\varphi_0 - \varphi),$$

rae $k^2 = (5 + \sqrt{5})/10, \tau^4 = 5/64;$
1) $\psi^2 = (3 - 4\eta) (\sqrt{5} - 1)/6$ при $\xi \ge 4/3,$
2) $\psi^2 = \frac{3}{2} (\sqrt{5} - 1)/(4\eta - 3)$ при $0 \le \xi \le 2 (\sqrt{5} - 1)/3.$

Инфинитная траектория 1 пересекает полярную ось в точке $\xi = 4/3$ и двумя симметричными ветвями уходит в бесконечность с асимптотами под углами $\varphi_1 = 147^\circ$ и $\varphi_2 = 213^\circ$; финитная траектория 2 — симметричная кривая, состоящая из двух вложенных одна в другую петель с диаметрами соответственно $d_1 = 1,358$ и $d_2 = 0,534$. При $E^* \rightarrow 0$ координата точки пересечения инфинитной траектории становится все больше по сравнению с единицей, а финитная траектория сужается около значения 2/3.

r) $E^* = 0$. Движение с нулевой полной энергией по экваториальной плоскости:

$$\int d\eta \{\eta \sqrt{2\eta - 3} \}^{-1} = (\varphi_0 - \varphi) / \sqrt{3}; r = (r_0/3) (1 + \cos \varphi).$$

В этом случае магнетик движется по кардионде (см. рис. 3).

д) $E^* < 0$, например, $E^* = -9/2$. Решение

$$F(\arccos \psi; k) = \sqrt[4]{8} (\psi_0 - \psi), \ \psi = \frac{3(\sqrt{2} + 1) - \eta}{3(\sqrt{2} - 1) + \eta}, \ k^2 = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{16}$$

204

Эта траектория деформированная кардиоида — приведена на рис. 3. Семейство таких модифицированных кардиоид при отрицательных значениях полной энергии ($E^* \rightarrow -\infty$) все больше сжимается к полярной оси и уменьшает свои размеры.

Выясним вопрос устойчивости финитных движений магнетиков в поле магнитного диполя в случае их движения по экваториальной поверхности. Когда безразмерная полная энергия частицы меньше нуля, возможны финитные траектории $\xi = \xi(\phi)$ ($\eta = \eta(\phi)$). В случае $E^* = 0$ рассмотрим малые возмущения ($\eta = \eta_0 + \eta_1$, $\eta_1 \ll \eta_0$) около траектории $\eta_0 = 3(1 + (\cos \phi)^{-1})$. Тогда для переменного возмущения η_1 в линейном приближении получим уравнение $d^2 \eta_1/d\phi^2 = \eta_1^2 - \eta_1$, т. е.

$$\int d\eta_1 |E^* - \eta_1^2/2 + \eta_1^3/3|^{-1/2} = \sqrt{2} \ (\varphi_0 - \varphi).$$

Так что малые возмущения приводят к траекториям — смещенным кардиоидам, которые навиваются на кардиоиду $\xi_0 = (1 + \cos' \phi)/3$. Таким образом, траектории при $E^* < 0$ устойчивы по отношению к малым возмущениям. Обобщая, можно утверждать, что финитные траектории магнетиков в поле магнитного диполя в случае их движения в экваториальной плоскости с отрицательной полной энергией устойчивы.

3. Систему уравнений (1) без ограничений можно интегрировать численно с помощью ЭВМ. Для этого целесообразно ее записать в декартовой системе координат:

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}} = ix(x^{2} + y^{2} + 5z^{2}), \frac{d^{2}y}{dt^{2}} = iy(x^{2} + y^{2} + 5z^{2}), \frac{d^{2}z}{dt^{2}} = 4\lambda z^{3},$$

$$\lambda = -4\pi^{2} \{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{3} \sqrt{x^{2} + y^{2} + 4z^{2}} \}^{-1}.$$
(10)

Здесь х, у, z и t — декартовы координаты и время, обезразмеренные с помощью характерного расстояния $r_0 = 3\mu am/M_0^2$ и времени $t_0 = 2\pi r_0^2 \times \sqrt{\frac{1}{mr_0/3\mu a}}$. Систему уравнений (10) необходимо дополнить начальными условиями для безразмерных координат:

$$\mathbf{r}_{0}(x_{0}, y_{0}, z_{0}) = (x(0), y(0), z(0))$$
(11)

и для безразмерных скоростей:

$$x_0(x_0, y_0, z_0) = (x(0), y(0), z(0)).$$
(12)

На ЭВМ ЕС 1033 по специальной программе [5] методом Рунге-Кутта с двойной точностью были численно проинтегрированы уравнения системы (10) с начальными условиями (11) и (12). В таблице приведены результаты численного расчета пространственных траекторий с параметрами: a) $r_0(1, 1, 1)$, $v_0(-1, -1, -1)$; 6) $r_0(1, 1, 1)$, $v_0(-1, -4, -1)$; в) $r_0(1, 1, 1)$, $v_0(-1, -1, -4)$.

Численно изучены также траектории феррочастиц на меридианных повсрхностях (см. (5)), для которых в уравнениях (10) необходимо положить y = y = 0. Для случая движения феррочастицы в любой меридианной плоскости с начальными условиями г) \mathbf{r}_0 (1, 0, 1), \mathbf{v}_0 (-1, 0, -1) и д) \mathbf{r}_0 (1, 0, 1), \mathbf{v}_0 (-4, 0, -1) полученные численно результаты также приведены в таблице.

x = yz x y x = yz x x z z z 0,00 0,05 0,10 0,25 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 1 $\begin{array}{r}
0,94\\
0,87\\
0,76\\
0,58\\
-2,12\\
-4,32
\end{array}$ 0,79 0,57 0,33 0,59 0,95 0,88 0,79 0,65 0,25 0,80 0,59 0,37 0,94 0,94 0,79 0,47 0,94 0,95 0,94 0,93 0,82 0,78 0,89 0,81 0,88 0,87 0,50 0,79 0,67 0,63 0,24 0,77 0,70 0,59 0,15 -0,79 21,34 64,41 107,47 0,73 0,39 0,63 1,86 -0,61 2,85 9,47 16,08 22,70 0,51 0,61 -0,19 0,34 -0,49 6,20 -0,87 0,36 -0,83 -1,96 -3,08 -4,20 -6,45 -8,69 -3,57 -7,40 -11,22 -15,04 0,20 -4,88 10,55 3,00 -0,77 -1,13 -4,80 -14,49 -24,10 -33,72 -43,33 -62,55 -81,77 -100,99 -120,251,13 $-1,04 \\ -1,32$ 6,19 -1,38-6,52 -8,73 -10,93 -15,33 -19,73 9,38 12,57 4,09 19,24 -1,64 150,53 193,59 279,72 365,84 7,06 29,31 35,93 -1,60 23,58 -1,89 -18.86-26.51-34.1510,02 15,75 -1.87 27,93 -2,15 0,60 0,70 0,80 0,90 1,00 49,16 62,39 75,60 88,85 15,96 -2,43-2,98-3,5436,61 45,30 -2,66-3,18-3,6922,13 21,89 27,83 28,50 -10,94 -24,14 34.88 -41,80 451,97 53,99 -13,19 -15,43 -49,45 -57,09 -4,20 -5,13 33,76 -28,54 41,26 62,68 438,09 -4.09 39.69 -32,95 -139,44 624,22 102,08 . 47,63 -4,64 71,37 (-4, 0, -1) (A) (-1, -1, -1) (a) (−1, 0, −1) (r) (-1, -4, -1) (6) (-1, -1, -4) (B) V

Таблица

206

Траектории феррочастицы в неоднородном поле магнитного диполя, рассчитанные на ЭВМ.

С помощью ЭВМ проверены также все полученные аналитически выражения разделов 1 и 2 настоящей работы для траекторий движения магнетиков в неоднородном магнитном поле диполя. Везде получается согласие с точностью 10⁻⁸, т. е. практически с той точностью, с какой обычно задаются табличные данные для эллиптических интегралов [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлиомис М. И. УФН, 112, 240 (1974).

- 2. Материалы III Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. Изд. МГУ, Плес, 1983.
- 3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1957.

4. Альвен Г., Фельтхальмар К. Г. Космическая электродинамика. Изд. Мир. М., 1967.

5. Пакет научных подпрограмм на языке ПЛ/1, часть II, Таллин, 1980.

6. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Изд. Наука, М., 1979.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԻՊՈԼԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԴԱՇՏՈՒՄ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄՈՄԵՆՏՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

վ. լ. ՀԵՔԵԼԵԿՅԱՆ, Մ. Ա. ՊԼՈԻԶՅԱՆ, Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Քննարկված է ըստ մեծության հաստատուն մադնիսական մոմենտով օմտված միադոմեն ֆերոմադնիսական մասնիկների շարմումը մադնիսական դիպոլի անհամասեռ դաշտում։ Մասնիկների շարմումը որոշակի մակերևույթներով և հարթություններով մանրամասն ուսումնասիրված է կվադրատուրաների տեսքով։ Առավել մանրակրկո քննարկված է ֆերոմադնիսական մասնիկների շարմումը մադնիսական դիպոլի նկատմամբ հասարակածային հարթության չրջանում։ Կատարված է որոշ տարածական հետադծերի թվային վերլուծություն, մասնավորապես միջօրեական հարթությունների նկատմամբ։ Մի շարք հետագծերի համար պարզված է այդ շարմունների կայունության հարցը։

ON THE MOTION OF THE PARTICLES WITH THE MAGNETIC MOMENT IN THE INHOMOGENEOUS FIELD OF THE MAGNETIC DIPOLE

V. L. HEKELEKIAN, M. A. PLUSIAN, R. S. HOVHANNISIAN

The motion of the particles-monodomain ferromagnetics with the constant modulus magnetic moment-in the inhomogeneous field of the magnetic dipole is considered. The motion of such particles on the definite surfaces and planes is studied analytically in detail in the forms of slightly calculated quadrature of elliptic integrals. In special details it is considered the motion of the ferromagnetic particle in the area of the equatorial plane with respect to magnetic dipole. The numerical analysis of some space trajectories is produced, particularly in the meridional planes. For several trajectories the question of stability of the motion is studied.