Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 21, вып. 4, 184—190 (1986)

УДК 551.466.3:535.36

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Р. С. ВАРДАНЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

(Поступила в редакцию 15 января 1985 г.)

Рассмотрена задача переноса излучения в одномерной случайно-неоднородной бесконечной среде в предположении, что вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния является статистически однородным, изотропным стационарным гауссовским полем с экспоненциальной корреляционной функцией. При учете многократного рассеяния применяется диаграммная техника. В приближении Бурре вычислены первые моменты функции источника и интенсивности. В этом же приближении найдено среднее число рассеяний кванта. Рассмотрены частные случаи дельта-коррелированного поля и поля с сильной корреляцией.

Задачи переноса излучения в стохастических средах, когда вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния является случайной функцией координат и времени, представляют большой интерес. Следует отметить, однако, что в теории переноса излучения таким задачам уделялось относительно мало внимания. Можно указать лишь несколько работ [1—3], посвященных задачам переноса излучения в стохастических средах, причем во всех этих работах задачи решаются методом малых возмущений в малоугловом приближении теории переноса.

При решении задач переноса излучения в стохастических средах можно использовать метод диаграммной техники. Ранее этот метод применялся при рассмотрении распространения электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах, когда диэлектрическая проницаемость среды является случайным полем (см., напр., [4—6]).

Настоящая работа посвящена нахождению первых моментов функции источника и интенсивности в случайно-неоднородной, одномерной бесконечной среде. Предполагается, что вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния является стационарным, статистически однородным, изотропным гауссовским полем с экспоненциальной корреляционной функцией:

$$B_\lambda(\tau_1, \tau_2) = B_\lambda(|\tau_1 - \tau_2|) = \langle \tilde{\lambda}(\tau_1)\, \tilde{\lambda}(\tau_2) \rangle = \sigma^2 e^{-\beta|\tau_1 - \tau_2|}, \tag{1}$$

где $\tilde{\lambda}(\tau) = \lambda(\tau) - \lambda_0$ — флуктуационная часть $\lambda(\tau)$, $\lambda_0 = \text{const}$ — среднее значение λ, $l = \beta^{-1}$ — радиус корреляции, $\langle \cdots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций λ, τ измеряется в единицах оптической толщины.

Пусть точечный источник света расположен в точке τ_0. Для каждой реализации $\lambda(\tau)$ функция источника $\widetilde{S}_\lambda(\tau, \tau_0)$ удовлетворяет уравнению [7]

$$\widetilde{S}_\lambda(\tau, \tau_0) = \frac{1}{2} e^{-|\tau-\tau_0|} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|} \lambda(\tau') \widetilde{S}_\lambda(\tau', \tau_0)\, d\tau', \tag{2}$$

или в операторном виде

$$\widetilde{S}_\lambda = K + \hat{K} \lambda \widetilde{S}_\lambda, \tag{3}$$

где $\hat{K}$ — интегральный оператор с ядром

$$K(|\tau_1 - \tau_2|) = \frac{1}{2} e^{-|\tau_1-\tau_2|}:$$

$$(\hat{K} f)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|) f(\tau')\, d\tau'.$$

Подставляя в (3) $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$, после соответствующих преобразований получим

$$\widetilde{S}_\lambda = S_0 + \hat{S}_0 \tilde{\lambda} \widetilde{S}_\lambda, \tag{4}$$

где $S_0(\tau, \tau_0) = S_0(|\tau - \tau_0|)$ является решением уравнения

$$S_0 = K + \lambda_0 \hat{K} S_0, \tag{5}$$

а $\hat{S}_0$ — интегральный оператор с ядром $S_0(\tau, \tau_0)$.

Представим $\widetilde{S}_\lambda$ из (4) в виде ряда Неймана

$$\widetilde{S}_\lambda = S_0 + \hat{S}_0 \tilde{\lambda} S_0 + \hat{S}_0 \tilde{\lambda} \hat{S}_0 \tilde{\lambda} S_0 + \cdots. \tag{6}$$

При усреднении (6) необходимо учесть, что из-за гауссового характера $\tilde{\lambda}(\tau)$ все его нечетные моменты равны нулю, а четные моменты выражаются через сумму произведений всевозможных парных корреляционных функций [4]:

$$\langle \tilde{\lambda}(\tau_1)\, \tilde{\lambda}(\tau_2) \cdots \tilde{\lambda}(\tau_{2n-1}) \rangle = 0,$$

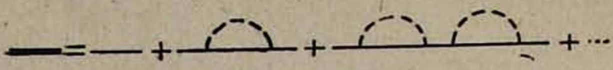
$$\langle \tilde{\lambda}(\tau_1) \cdots \tilde{\lambda}(\tau_{2n}) \rangle = \sum B_\lambda(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}) \cdots B_\lambda(\tau_{i_{2n-1}}, \tau_{i_{2n}}).$$

Усредняя (6), представим $S = \langle \widetilde{S}_\lambda \rangle$ в виде ряда

$$S(\tau, \tau_0) = S_0(\tau, \tau_0) +$$

$$+ \iint_{-\infty}^{\infty} S_0(\tau, \tau_1) S_0(\tau_1, \tau_2) S_0(\tau_2, \tau_0) B_\lambda(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 + \cdots. \tag{7}$$

Для наглядного представления структуры ряда (7) можно воспользоваться диаграммной техникой [4—6]. Изобразим S_0, S и B_λ соответственно сплошной, жирной сплошной и пунктирной линиями. Тогда (7) можно представить в следующем графическом виде

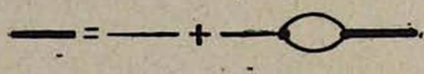
 (8)

В каждой диаграмме этого ряда свободным концам сопоставляются координаты τ и τ_0, а по координатам всех внутренних точек пересечения сплошных и пунктирных линий проводится интегрирование.

Далее, назовем диаграмму сильно связанной, если ее нельзя разделить на две составляющие диаграммы путем разрыва лишь сплошной линии. Обозначим через Q сумму всех сильно связанных диаграмм без свободных концов:

 (9)

Сгруппировав в (8) слагаемые, можно получить следующее уравнение Дайсона относительно S:

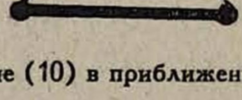


$$S = S_0 + \widehat{S}_0 \widehat{Q} S, \tag{10}$$

$$S(\tau, \tau_0) = S_0(\tau, \tau_0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int S_0(\tau, \tau_1)\, Q(\tau_1, \tau_2)\, S(\tau_2, \tau_0)\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Уравнение Дайсона (10) не является замкнутым, так как Q представлено в виде ряда (9). Тем не менее уравнение (10) обладает определенным преимуществом по сравнению с (7) или (8). Действительно, если в (9) ограничиться лишь одним членом ряда Q, то полученное в этом приближении из (10) решение будет представлять собой сумму некоторой подпоследовательности из (8).

Ниже мы ограничимся приближением Бурре, что соответствует замене Q первым членом ряда (9):

$Q \approx Q_1 =$  $= S_0\, B_\lambda.$ (11)

Обозначим через S_1 решение (10) в приближении (11):

$$S_1 = S_0 + \widehat{S}_0\, \widehat{Q}_1 S_1. \tag{12}$$

Учитывая, что $S_0(\tau, \tau_0)$ и $B_\lambda(\tau, \tau_0)$ зависят от модуля разности аргументов, после несложного анализа можно убедиться, что таким же свойством обладает и ядро массового оператора $\widehat{Q}$: $Q(\tau_1, \tau_2) = Q(|\tau_1 - \tau_2|)$.

Следовательно, уравнение Дайсона (10) можно решить методом фурье-преобразования. Обозначив через $\overline{S}_0(k)$, $\overline{S}(k)$ и $\overline{Q}(k)$ фурье-образы соответственно функций $S_0(\tau)$, $S(\tau)$ и $Q(\tau)$, из (10) получим

$$\overline{S}(k)=\frac{\overline{S}_0(k)}{1-\overline{S}_0(k)\,\overline{Q}(k)}\,. \qquad (13)$$

Следовательно,

$$S(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{S}_0(k)\,e^{ik\tau}}{1-\overline{S}_0(k)\,\overline{Q}(k)}\,dk. \qquad (14)$$

Найдем $S(\tau)$ в приближении Бурре. Из (1), (5) и (11) имеем

$$\overline{S}_0(k)=\frac{1}{k^2+\alpha_0^2}\,,\quad \overline{Q}_1(k)=\sigma^2\frac{\alpha}{\alpha_0}\,\frac{1}{k^2+\alpha^2}\,,$$

$$\alpha_0=\sqrt{1-\lambda_0}\,,\quad \alpha=\alpha_0+\beta. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и вычисляя полученный интеграл методом теории вычетов, получаем

$$S_1(\tau)=A_+e^{-\alpha_+|\tau|}+A_-e^{-\alpha_-|\tau|}, \qquad (16)$$

$$A_\pm=\pm\frac{\alpha_\pm^2-\alpha^2}{2\xi\,\alpha_\pm},\quad \alpha_\pm=\sqrt{\frac{\mu\pm\xi}{2}}\,,\quad \mu=\alpha^2+\alpha_0^2,$$

$$\xi=\sqrt{(\alpha^2-\alpha_0^2)^2+4\sigma^2\frac{\alpha}{\alpha_0}}\,.$$

Зная функцию $S(\tau)$, можно вычислить среднее число рассеяний кванта $\overline{N}$ [7]:

$$\overline{N}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(\tau)\,d\tau\Big/\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(\tau)\,d\tau=\overline{S}\,(0). \qquad (17)$$

Здесь $\overline{S}\,(0)$ — значение фурье-образа $\overline{S}\,(k)$ в точке $k=0$. Из (13) и (17) находим

$$\overline{N}=\frac{\overline{S}_0(0)}{1-\overline{S}_0\,(0)\,\overline{Q}\,(0)}=\frac{\overline{N}_0}{1-\overline{N}_0\,\overline{Q}\,(0)}\,. \qquad (18)$$

В частности, в приближении Бурре имеем

$$\overline{N}_1=\overline{N}_0\left[1-\sigma^2\frac{l\,\overline{N}_0^2}{l+\sqrt{\overline{N}_0}}\right]^{-1}, \qquad (19)$$

где $\overline{N}_0=\dfrac{1}{1-\lambda_0}$ — среднее число рассеяний при отсутствии флуктуаций.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Случай δ-коррелированного случайного поля, когда

$$B_\lambda(\tau_1,\tau_2)=\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2).$$

В приближении (11) для $S_1^*(\tau)$ получаем

$$S_1^*(\tau)=\frac{1}{2\alpha^*}e^{-\alpha^*|\tau|},\ \alpha^*=\sqrt{\alpha_0^2-\frac{\sigma^2}{2\alpha_0}} \tag{20}$$

и, следовательно, для $\overline{N}_1^*$ имеем

$$\overline{N}_1^*=\overline{N}_0\left[1-\frac{\sigma^2}{2}\overline{N}_0^{3/2}\right]. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что в приближении Бурре стохастическая среда «в среднем» эквивалентна однородной среде с эффективной вероятностью выживания кванта при элементарном акте рассеяния

$$\lambda^*=\lambda_0+\frac{\sigma^2}{2\sqrt{1-\lambda_0}}.$$

б) Случай сильной корреляции. Когда $\beta\to 0$, из (16) получаем

$$\begin{gathered}S_1'(\tau)=\frac{1}{4\alpha_+'}e^{-\alpha_+'|\tau|}+\frac{1}{4\alpha_-'}e^{-\alpha_-'|\tau|},\\ \overline{N}_1'=\overline{N}_0(1-\sigma^2\overline{N}_0^2)^{-1},\\ \alpha_\pm'=\sqrt{\alpha_0^2\pm\sigma}.\end{gathered} \tag{22}$$

Если известна усредненная функция источника в каком-то приближении, можно найти среднюю интенсивность в этом приближении. Пусть $\widetilde{I}_\lambda^\pm$ — интенсивности излучения соответственно вдоль направления возрастания τ и наоборот. В рассмотренной задаче $\widetilde{I}_\lambda^\pm$ удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{gathered}\pm\frac{d\widetilde{I}_\lambda^\pm}{d\tau}=-\widetilde{I}_\lambda^\pm+\frac{\lambda(\tau)}{2}\widetilde{S}_\lambda+\frac{1}{2}\delta(\tau-\tau_0),\\ \widetilde{I}_\lambda^+(\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to-\infty,\ \widetilde{I}_\lambda^-(\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to+\infty.\end{gathered} \tag{23}$$

Решив первое из этих уравнений и усреднив по ансамблю реализаций λ, для $I^+=\langle\widetilde{I}_\lambda^+\rangle$ получим

$$I^+(\tau,\tau_0)=\frac{1}{2}e^{-(\tau-\tau_0)}\{\theta(\tau-\tau_0)+\lambda_0\int_{-\infty}^{\tau-\tau_0}[S(\tau')+f(\tau')]e^{\tau'}d\tau'\}, \tag{24}$$

где

$$f(\tau)=\langle\widetilde{\lambda}\widetilde{S}_\lambda\rangle.$$

Из сравнения (4) и (10) имеем $f=\widehat{Q}S$. Следовательно $f(\tau)$ можно определить из интегрального уравнения

$$\widehat{S}_0 f=S-S_0. \tag{25}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\widehat{S}_0^{-1} = -\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \alpha_0^2\right) \equiv \widehat{L}_0,$$

из (25) в приближении Бурре находим

$$f_1(\tau) = \widehat{L}_0 S_1 - \delta(\tau) =$$
$$= (\alpha_0^2 - \alpha_-^2) A_- e^{-\alpha_- |\tau|} + (\alpha_0^2 - \alpha_+^2) A_+ e^{-\alpha_+ |\tau|}. \tag{26}$$

Соответственно, для $I_1^+(\tau, \tau_0)$ получаем:

при $\tau > \tau_0$

$$I_1^+(\tau, \tau_0) = \frac{1+\alpha_-}{2} A_- e^{-\alpha_-(\tau-\tau_0)} + \frac{1+\alpha_+}{2} A_+ e^{-\alpha_+(\tau-\tau_0)};$$

при $\tau < \tau_0$

$$I_1^+(\tau, \tau_0) = \frac{1-\alpha_-}{2} A_- e^{\alpha_-(\tau-\tau_0)} + \frac{1-\alpha_+}{2} A_+ e^{\alpha_+(\tau-\tau_0)}.$$

Автор выражает благодарность Н. Б. Енгибаряну и Ю. А. Кравцову за полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распространение волн в хаотически-неоднородных средах и средах с регулярными неоднородностями. Отчет НИРФИ, Горький, 1976. № Гос. рег. 71052854, ВИНИТИ, Б-59437, 1977.
2. *Кацев И. Л.* Изв. АН СССР, ФАО, 17, 725 (1981).
3. *Кацев И. Л.* Изв. АН СССР, ФАО, 19, 1172 (1983).
4. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. Изд. Наука, М., 1978.
5. *Апресян Л. А., Кравцов Ю. А.* Теория переноса излучения. Изд. Наука, М., 1983.
6. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородной среде.. Изд. Мир, М., 1981.
7. *Иванов В. В.* Перенос излучения и спектры небесных тел. Изд. Наука, М., 1969.

ՄԻԱՉԱՓ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Դիտարկված է ճառագայթման տեղափոխման խնդիրը միաչափ անվերջ ստոխաստիկ միջավայրում, այն ենթադրությամբ, որ քվանտի վերաճառագայթման λ հավանականությունը հանդիսանում է վիճակագրորեն համասեռ, իզոտրոպ, ստացիոնար Գաուսյան դաշտ էքսպոնենցիալ կորելյացիոն ֆունկցիայով։ Խնդիրը լուծված է Բուրրեի հայտնի մոտավորությամբ։ Գտնված են աղբյուրային ֆունկցիայի և ինտենսիվության առաջին մոմենտները, հաշված է քվանտի ցրումների միջին թիվը։ Որպես մասնավոր օրինակներ դիտարկված են ուժեղ կորելյացիայի և դելտա-կորելացված դաշտի դեպքերը։

ON THE PROBLEM OF RADIATION TRANSFER IN ONE-DIMENSIONAL STOCHASTIC MEDIUM

R. S. VARDANYAN

The problem of radiation transfer in one-dimensional stochastic and nonhomogeneous infinite medium is considered under the assumption that the probability of quantum survival λ for an elementary act of scattering is expressed by statistically homogeneous, isotropic and stationary Gaussian field with an exponential correlation function. For calculations of multiple scattering the diagram method was applied. The first moments of the source function and of the intensity as well as the average number of quantum scatterings were calculated in the Bourret approximation. Particular cases of delta-correlated and strong correlation fields were also considered.