Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 21, вып. 2, 59—64 1986)

УДК 621.315:529

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ МЕТОДОМ ПУАНКАРЕ

Г. М. АМИРДЖАНЯН

СКТБ «Аэрозоль»

В. С. САРДАРЯН

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Л. Г. ТОРИКЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 5 мая 1984 г.)

Методом Пуанкаре найдено формальное решение системы уравнений, описывающих динамику квадратично-нелинейной цепочки осцилляторов, в виде разложения в ряд Тейлора по малому параметру нелинейности. Время разбивается на малые промежутки, при которых эти ряды сходятся. Сшивание формальных решений на границах временных промежутков сходимости рядов дает общее решение вышеуказанной системы уравнений. Показана тесная связь между стохастическими процессами и расходимостью рядов Тейлора, представляющих формальное решение системы уравнений, описывающих динамику квадратично-нелинейной цепочки осцилляторов. Дано приближенное решение этой системы с точностью до первого порядка по малому параметру нелинейности. Приведены вычисления в случае цепочки из двух квадратично-нелинейных осцилляторов.

1. В работе [1] было показано, что стохастические процессы в квадратично-нелинейной цепочке осцилляторов являются неустойчивыми. Методика [1] заимствована из работы [2], в которой предполагалась достаточная малость параметра нелинейности α. Как и в работе [1], рассмотрим систему уравнений, описывающих колебания цепочки квадратично-нелинейных осцилляторов:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_l=(x_{l+1}+x_{l-1}-2x_l)[1+\alpha(x_{l+1}-x_{l-1})],\\ l=1,\cdots,N-1;\ N=L/a,\ x_0=x_N=0,\ a=1,\end{gathered} \tag{1}$$

где l — номер осциллятора, N — число осцилляторов в цепочке, a — расстояние между осцилляторами в положении равновесия, L — длина цепочки осцилляторов, x_l — смещение единичной массы относительно положения равновесия.

В настоящей работе предлагается алгоритм решения системы (1), основанный на методе Пуанкаре [3]. Развиваемый метод исследования существенно отличается от [4].

Как и в [1], решение системы (1) будем искать в виде суммы нормальных мод

$$x_l = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin \frac{\pi k l}{N}. \tag{2}$$

После подстановки в (1) получаем

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = -\frac{\alpha}{\sqrt{2(N-1)}} \Big(\sum_{m=1}^{k-1} A_m Q_{k-m} \omega_{k-m}^2 - \\ - \sum_{m=k+1}^{N-1} A_m Q_{k+N-m} \omega_{k+N-m}^2 + \sum_{m=1}^{N-k-1} A_m Q_{k+m} \omega_{k+m}^2 - \\ - \sum_{m=k+1}^{N-1} A_m Q_{m-k} \omega_{m-k}^2 \Big), \tag{3}$$

где

$$\omega_k = 2 \sin(\pi k / 2N), \; A_m = Q_m \omega_m \sqrt{4 - \omega_m^2}.$$

Следуя методу Пуанкаре [3], будем искать решение Q_k в виде

$$Q_k = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{k,l} \alpha^l. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, получаем $\ddot{Q}_{k,0} + \omega_k^2 Q_{k,0} = 0$,

$$\ddot{Q}_{k,l+1} + \omega_k^2 Q_{k,l+1} = F_{k,l}(t), \tag{5}$$

где

$$F_{k,l}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \sum_{p=0}^{l} \Big(\sum_{m=1}^{k-1} B_m Q_{m,p} Q_{k-m,l-p} \omega_{k-m}^2 - \\ - \sum_{m=k+1}^{N-1} B_m Q_{m,p} Q_{k+N-m,l-p} \omega_{k+N-m}^2 + \sum_{m=1}^{N-k-1} B_m Q_{m,p} \times \\ \times Q_{k+m,l-p} \omega_{k+m}^2 - \sum_{m=k+1}^{N-1} B_m Q_{m,p} Q_{m-k,l-p} \omega_{m-k}^2 \Big), \tag{6}$$

$$B_m \equiv \omega_m \sqrt{4 - \omega_m^2}.$$

Из (6) видно, что функции $F_{k,l}(t)$ зависят только от тех $Q_{m,j}$, для которых $j \leqslant i$. Таким образом, если известны решения системы (5) до некоторого значения i, то можно найти решение и при значении $i+1$.

Система (5) описывает динамику линейных осцилляторов, к которым приложены известные внешние силы $F_{k,l}(t)$. Причиной расходимости рядов (4) при малых α может быть только большая по модулю величина значений $Q_{k,l}$, что, в свою очередь, возможно, если силы $F_{k,l}(t)$ содержат гармоники, близкие по частоте к ω_k. Поэтому ряды (4) при малых α расходятся только тогда, когда система (5) близка к резонансному режиму.

2. Рассмотрим задачу Коши для системы (5). Пусть при $t = t_p$ имеем

$$Q_{k,0}(t_p) = C_k^{(p)}, \; \dot{Q}_{k,0}(t_p) = D_k^{(p)}, \\ Q_{k,l}(t_p) = 0, \; \dot{Q}_{k,l}(t_p) = 0 \; (i \geqslant 1). \tag{7}$$

Тогда [5]

$$Q_{k,0}(t)=(C_k^{(p)}\omega_k \sin\omega_k t_p + D_k^{(p)}\cos\omega_k t_p)\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}+$$

$$+(C_k^{(p)}\omega_k\cos\omega_k t_p - D_k^{(p)}\sin\omega_k t_p)\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k},$$

$$Q_{k,i}(t)=\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\int_{t_p}^{t}F_{k,i-1}\cos\omega_k t dt- \tag{8}$$

$$-\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\int_{t_p}^{t}F_{k,i-1}\sin\omega_k t dt \quad (i\geqslant 1,\ t\geqslant t_p).$$

Далее, снова поставим задачу Коши для системы (5) в следующем виде. Пусть при $t=t_{p+1}$ имеем

$$Q_{k,0}(t_{p+1})=C_k^{(p+1)},\ \dot{Q}_{k,0}(t_{p+1})=D_k^{(p+1)},$$

$$Q_{k,i}(t_{p+1})=0,\ \dot{Q}_{k,i}(t_{p+1})=0 \quad (i\geqslant 1), \tag{9}$$

где (см. (7))

$$C_k^{(p+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}Q_{k,i}(t_{p+1})\alpha^i,$$

$$D_k^{(p+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}\dot{Q}_{k,i}(t_{p+1})\alpha^i. \tag{10}$$

Тогда решение системы (5) при $t\geqslant t_{p+1}$ примет вид

$$Q_{k,0}(t)=(C_k^{(p+1)}\omega_k\sin\omega_k t_{p+1}+D_k^{(p+1)}\cos\omega_k t_{p+1})\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}+$$

$$+(C_k^{(p+1)}\omega_k\cos\omega_k t_{p+1}-D_k^{(p+1)}\sin\omega_k t_{p+1})\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}, \tag{11}$$

$$Q_{k,i}(t)=\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\int_{t_{p+1}}^{t}F_{k,i-1}\cos\omega_k t dt-\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\int_{t_{p+1}}^{t}F_{k,i-1}\sin\omega_k t dt \ (i\geqslant 1).$$

Таким образом, зная решение системы (5) при $t\in[t_p;\ t_{p+1}]$, мы можем найти решение этой системы и при $t\in[t_{p+1};\ t_{p+2}]$. Такой прием дает возможность избежать возможной расходимости рядов (4), так как величины $Q_{k,i}(t)$ при $t\in[t_p;\ t_{p+1}]$ малы, если $\Delta t_p\equiv t_{p+1}-t_p$ достаточно мала (см. (8)). Если продолжать описывать решение системы (5) при $t>t_{p+1}$ по формулам (8), то из-за резонансов величины $Q_{k,i}(t)$ могут стать большими и быстрота уменьшения α^i с увеличением i может оказаться недостаточной для сходимости рядов (4).

Выберем последовательность

$$t_0=0,\ t_1,\ t_2,\cdots,\ t_p,\cdots \tag{12}$$

такую, что при $t \in [t_p;\ t_{p+1}]$ ряды (4) сходятся, а при $t \overline{\in} [t_p;\ t_{p+1}]$ они расходятся. Тогда, в соответствии с вышесказанным, среднее значение величин $\Delta t_p \equiv t_{p+1} - t_p$ будет характеризовать время перемешивания [4].

Очевидно, что причиной расходимости рядов (4) может быть также и большое значение параметра нелинейности α. В этом случае систему (1) можно представить в виде

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l)[1 + \alpha_0 (x_{l+1} - x_{l-1}) + (\alpha - \alpha_0)(x_{l+1} - x_{l-1})], \quad (13)$$

где α_0 — значение параметра нелинейности, при котором решение системы (1) известно. Воспользовавшись снова методом Пуанкаре, решение системы (1) можно искать в виде

$$x_l = \sum_{j=0}^{\infty} x_{l,\,j} (\alpha - \alpha_0)^j, \quad (14)$$

что позволяет устранить причину расходимости рядов (4) из-за большого значения α. Из (14) и вышеизложенного следует, что стохастические процессы можно интерпретировать как переход решения системы (1) от одного элемента системы моногенных рядов (14) многозначной аналитической функции $Q_k(\alpha)$ к другому [6], т. е. причиной стохастичности служит многозначность аналитической функции $Q_k(\alpha)$ от параметра α, которая имеет бесконечное число ветвей, т. е. является бесконечнолистной.

Перейдем теперь к нахождению решения системы (1). Ограничившись только первым приближением по нелинейному параметру α, решение системы (1) можно записать в виде

$$x_l \approx \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} (Q_{k,\,0} + \alpha Q_{k,\,1}) \sin \frac{\pi k l}{N},$$

$$Q_{k,\,0} = C_k^{(0)} \cos \omega_k t + \frac{D_k^{(0)}}{\omega_k} \sin \omega_k t,$$

$$Q_{k,\,1} = \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \int_0^t F_{k,\,0} \cos \omega_k t dt - \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k} \int_0^t F_{k,\,0} \sin \omega_k t dt,$$

$$F_{k,\,0} = -\frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \left(\sum_{m=1}^{k-1} B_m Q_{m,\,0} Q_{k-m,\,0} \omega^2_{k-m} - \right.$$

$$- \sum_{m=k+1}^{N-1} B_m Q_{m,\,0} Q_{k+N-m,\,0} \omega^2_{k+N-m} + \sum_{m=1}^{N-k-1} B_m Q_{m,\,0} Q_{k+m,\,0} \omega^2_{k+m} -$$

$$\left. - \sum_{m=k+1}^{N-1} B_m Q_{m,\,0} Q_{m-k,\,0} \omega^2_{m-k} \right).$$

Ввиду громоздкости этих формул мы не приводим в явном виде решение системы (1) в первом приближении по нелинейному параметру, хотя видно, что интегралы, фигурирующие в выражении для $Q_{k,\,1}$, выражаются через элементарные функции.

3. Рассмотрим случай $N = 2$, т. е. цепочку из двух квадратично-нелинейных осцилляторов. Система (1) принимает вид

$$\ddot{x}_1=(x_2-2x_1)(1+\alpha x_2),$$
$$\ddot{x}_2=(x_1-2x_2)(1-\alpha x_1). \tag{15}$$

После выполнения процедуры, описанной в пункте 1, получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{1,n}=\frac{1}{2}\Big(\sin t\int_0^t f_{1,n-1}(t)\cos t\,dt-\cos t\int_0^t f_{1,n-1}(t)\sin t\,dt+$$
$$+\frac{\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}\int_0^t f_{2,n-1}(t)\cos\sqrt{3}\,t\,dt-\frac{\cos\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}\int_0^t f_{2,n-1}(t)\sin\sqrt{3}\,t\,dt\Big), \tag{16}$$
$$x_{2,n}=\frac{1}{2}\Big(\sin t\int_0^t f_{1,n-1}(t)\cos t\,dt-\cos t\int_0^t f_{1,n-1}(t)\sin t\,dt-$$
$$-\frac{\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}\int_0^t f_{2,n-1}\cos\sqrt{3}\,t\,dt+\frac{\cos\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}\int_0^t f_{2,n-1}(t)\sin\sqrt{3}\,t\,dt\Big),$$

где

$$f_{1,n}(t)\equiv\sum_{i=0}^{n}(x_{2,i}x_{2,n-i}-x_{1,i}x_{1,n-i}),$$
$$f_{2,n}(t)\equiv\sum_{i=0}^{n}(x_{2,i}x_{2,n-i}+x_{1,i}x_{1,n-i}-4x_{1,i}x_{2,n-i}), \tag{17}$$

$$x_{1,0}=\frac{1}{2}(A\cos t+C\cos\sqrt{3}\,t+B\sin t+D\sin\sqrt{3}\,t),$$
$$x_{2,0}=\frac{1}{2}(A\cos t-C\cos\sqrt{3}\,t+B\sin t-D\sin\sqrt{3}\,t). \tag{18}$$

Вычисления на ЭВМ с помощью соотношений (16) при значениях входных данных

$$A,\ B,\ C,\ D\in\{1;\ 1/2\},$$
$$\alpha\in\{0{,}01;\ 0{,}1;\cdots;\ 1\},$$
$$t\in\left\{\frac{1}{10\alpha};\ \frac{1}{\alpha};\ \frac{10}{\alpha}\right\}$$

показали, что ряды (4) сходятся при $\alpha\sim 0{,}01$ и расходятся при $\alpha\geqslant 0{,}1$ и $t\gtrsim 1/\alpha$. В соответствии с нашим предположением о связи расходимости рядов (4) и стохастическими процессами, в рассматриваемом случае при значениях $\alpha\geqslant 0{,}1$ динамическая система переходит в режим стохастической динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амирджанян Г. М., Сардарян В. С., Торикян Л. Г.* Изв. АН АрмССР, Физика, 18, 335 (1983).

2. *Израйлев Ф. М., Чириков Б. В.* ДАН СССР, 166, 57 (1966).
3. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. Изд. Наука, М., 1982.
4. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.* УФН, 105, 3 (1971).
5. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. физ.-мат. литературы, М., 1959.
6. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. Изд. Наука, М., 1968.

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՈՐԵՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐՆԵՐԻ ՇՂԹԱՅԻ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՊՈՒԱՆԿԱՐԵԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Հ. Մ. ԱՄԻՐՋԱՆՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ, Լ. Գ. ԹՈՐԻԿՅԱՆ

Պուանկարեի մեթոդով գտնված է քառակուսիորեն ոչ գծային օսցիլյատորների շղթայի դինամիկան նկարագրող հավասարումների համակարգի ձևական լուծումը ըստ ոչ գծայնության փոքր պարմետրի Թեյլորի շարքի վերածված տեսքով։ Ժամանակը բաժանված է այնպիսի փոքր միջակայքերի, որոնցում այդ շարքերը զուգամիտում են։ Շարքերի զուգամիտության ժամանակային տիրույթների սահմաններում ձևական լուծումների միացումը տալիս է վերը նշված հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը։ Ցույց է տրված ստոխաստիկական պրոցեսների և քառակուսիորեն ոչ գծային օսցիլյատորների շղթայի դինամիկան նկարագրող հավասարումների համակարգի ձևական լուծումների Թեյլորի շարքի տարամիտության սերտ կապը։ Տրված է այդ համակարգի մոտավոր լուծումը ոչ գծայնության փոքր պարամետրի առաջին կարգի ճշտությամբ։ Բերված են հաշվարկները այն դեպքի համար, երբ շղթան բաղկացած է երկու օսցիլյատորից։

INVESTIGATION OF THE STOCHASTIC DYNAMICS OF QUADRATICALLY-NONLINEAR CHAIN OF OSCILLATORS BY MEANS OF POINCARE METHOD

G. M. AMIRDZHANYAN, V. S. SARDARYAN, L. G. TORIKYAN

A formal solution for the set of equations describing the dynamics of quadratically-nonuniform chain of oscillators in the form of Taylor series expansion in small parameters of nonlinearity has been obtained by means of Poincare method. These series converge in small intervals of time. The matching of formal solutions at boundaries of series convergence intervals gives the general solution of this set of equations. A close relation between stochastic processes and the divergence of Taylor series describing the dynamics of quadratically-nonlinear chain of oscillators was shown. An approximate solution of this set of equations in the first order of small parameter of nonlinearity is obtained. The calculations for the chain of two quadratically-nonlinear oscillators are given.