

УДК 66.067.52:637.232.152

ВОЛНЫ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В БЫСТРОВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Д. С. ТОРОСЯН

Ленинаканский государственный педагогический институт
им. М. Налбандяна

(Поступила в редакцию 29 октября 1983 г.)

Установлено, что свободная поверхность однородной жидкости внутри быстро вращающегося цилиндрического сосуда покрыта центробежными поверхностными волнами. При определенных условиях волновое движение на свободной поверхности жидкости может быть неустойчивым. Полученные результаты исследования подтверждены экспериментально.

Волны на свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги имеют важное прикладное значение не только для гидродинамики внутрироторных потоков, но и для других областей физики, где протекают волновые процессы.

В настоящее время считается, что если цилиндрический сосуд (ротор центрифуги) с достаточно большой угловой скоростью вращается вокруг вертикальной оси, то можно пренебречь действием сил земного притяжения и принять, что поверхности уровня (поверхности, в каждой точке которых давление постоянно) однородной жидкости представляют собой круговые концентрические цилиндрические поверхности, ось которых практически совпадает с осью вращения сосуда. Тогда в частично заполненном однородной жидкостью сосуде ее свободная поверхность, как одна из поверхностей уровня, должна быть цилиндрической [1—3] (рис. 1а). Однако экспериментальные исследования показывают, что свободная поверхность однородной жидкости внутри быстро вращающегося сосуда покрыта центробежными поверхностными волнами, которые на определенной глубине от свободной поверхности гасятся и поверхности уровня однородной жидкости представляют собой круговые концентрические поверхности (см. тот же рис. 1а). Кроме того, при определенных условиях, когда ротор вращается с постоянной угловой скоростью, на свободной поверхности однородной жидкости параллельно образующей цилиндрической поверхности сосуда могут возникать стоячие волны. При этом стоячая волна может быть и одиночной. При определенных условиях стоячие волны разрушаются у гребней.

Рассмотрим частично заполненный идеальной жидкостью ротор длиной l , который с большой постоянной угловой скоростью ω вращается относительно вертикальной оси вращения OZ , проходящей через его центр масс. Обозначим радиус невозмущенной свободной поверхности жидкости

через R_0 , а внутренний радиус ротора через R (рис. 16). Запишем линейризованные гидродинамические уравнения [4—6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (2)$$

$$l \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

где u и v — составляющие скорости частицы жидкости соответственно в направлениях r и θ , t — время, ρ — плотность жидкости, p — давление, ξ — радиус возмущенной поверхности жидкости.

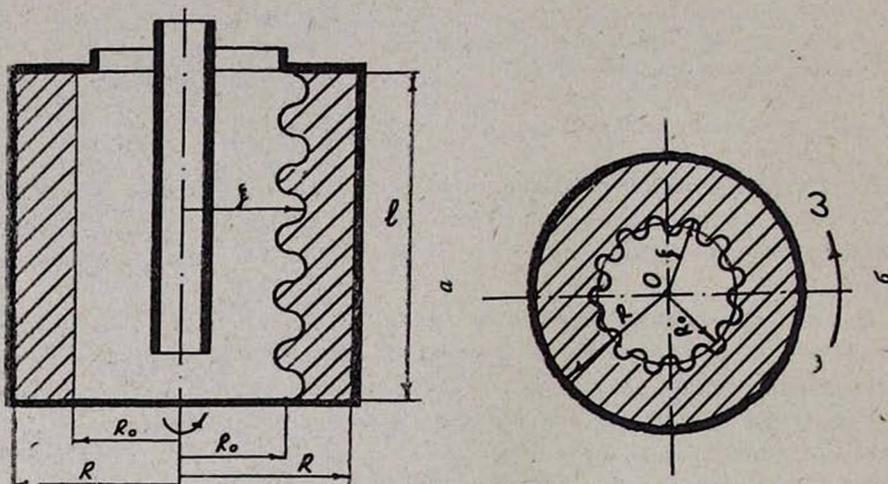


Рис. 1. Схема ротора: а—форма свободной поверхности (слева—цилиндрическая (общепринятая), справа—волнистая (предлагаемая)); б—расчетная схема свободной поверхности, покрытой волнами.

В уравнение (3) входит величина ξ , так как при волновом движении жидкости внутри цилиндрического ротора частица жидкости, принадлежащая поверхности, не может перейти внутрь жидкости, а все время остается на свободной поверхности [2, 4, 7]. В связи с этим примем, что $\partial \xi / \partial t = \partial \zeta / \partial t$, где ζ — величина осевого (вдоль оси OZ) отклонения возмущенной поверхности от невозмущенной l . Уравнение свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги в произвольный момент времени запишем в виде [8]

$$\xi = \xi(\theta, z, t). \quad (4)$$

Приняв, что внешние силы, действующие на жидкость, являются чисто центробежными силами инерции [3, 8], из уравнений (1)—(3) получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\omega^2 \right) = \omega^2 l R_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (5)$$

Предположим [8], что

$$-\xi = \eta \cos(n\theta - \sigma t), \quad (6)$$

где n — целое число волн, укладываемых на длине окружности радиуса R_0 , σ — круговая частота, а η — функция переменной r . После подстановки (6) в уравнение (5) получим

$$\eta''(r) + \frac{1}{r} \eta'(r) + \left(\chi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \eta(r) = 0, \quad (7)$$

где

$$\chi^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{R_0^2 l \omega^2}.$$

Если величина $\sigma^2 > 4\omega^2$, то будем иметь [6]

$$\eta = A J_n(\chi r) + B Y_n(\chi r), \quad (8)$$

где $J_n(\chi r)$ и $Y_n(\chi r)$ — бесселевы функции первого и второго родов порядка n , A и B — произвольные постоянные.

При значениях величины $\sigma^2 < 4\omega^2$ имеем [6]

$$\eta = C I_n(\lambda r) + D K_n(\lambda r), \quad (9)$$

где $I_n(\lambda r)$ и $K_n(\lambda r)$ — бесселевы функции мнимого аргумента второго рода порядка n (функции Макдональда), C и D — произвольные постоянные, а $\lambda^2 = -\chi^2$.

Задача о движении центробежных волн в роторе сводится к решению уравнения Лапласа при граничных условиях на внутренней поверхности ротора и на свободной поверхности жидкости внутри цилиндрического быстровращающегося ротора.

Определим скорость жидкости через градиент потенциала ϕ . Тогда уравнение неразрывности перейдет в уравнение Лапласа [1—2, 4, 5, 7, 9], решение которого ищем в виде

$$\phi = \Phi(r, \theta, z) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (10)$$

где ε — начальная фаза, а $\Phi(r, \theta, z)$ — функция, описывающая зависимость амплитуды от цилиндрических координат, которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0. \quad (11)$$

Решение (11) представим в виде [6]

$$\Phi(r, \theta, z) = R_n(\chi r) \exp(\pm \chi z) \exp(\pm i n \theta), \quad (12)$$

где $R_n(\chi r)$ — решение уравнения Бесселя.

Граничные условия сформулируем в виде [8, 10, 11]

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R_0} = -\frac{\sigma^2}{\omega^2 R_0}, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (14)$$

Используя (12)—(14), получим систему однородных линейных уравнений для постоянных A и B , которая имеет ненулевое решение только в

том случае, если определитель этой системы равен нулю. Из этого условия найдем дисперсионное соотношение

$$\sigma^2 = \omega^2 R_0 \chi F, \quad (15)$$

где

$$F = \frac{J'_n(\chi R) Y'_n(\chi R_0) - J'_n(\chi R_0) Y'_n(\chi R)}{J_n(\chi R_0) Y_n(\chi R) - J_n(\chi R) Y_n(\chi R_0)},$$

откуда следует, что круговая частота зависит от напряженности поля центробежных сил инерции $\omega^2 R$, радиусов заполнения R_0 и R и постоянной χ .

Получим дисперсионное соотношение с учетом сил поверхностного натяжения [8]. Запишем граничное условие на свободной поверхности жидкости внутри быстровращающегося сосуда в виде [8]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \omega^2 R_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{T}{\rho R_0^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} = 0, \quad (16)$$

где T — сила поверхностного натяжения жидкости.

На основании (14) и (16) имеем

$$\sigma^2 = R_0 \chi F \left(\omega^2 + \frac{T n^2}{\rho R_0^3} \right). \quad (17)$$

На рис. 2 приведена зависимость высоты волны h от радиуса заполнения R_0 при различных угловых скоростях вращения ω , полученная на основании стробоскопических исследований.

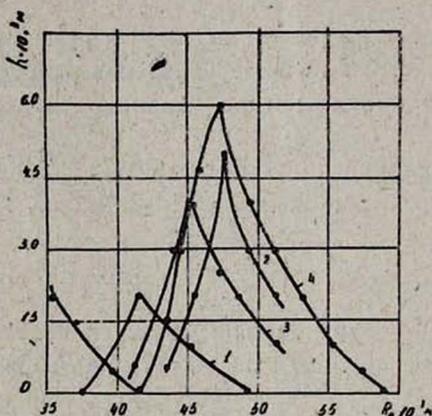


Рис. 2. Зависимость $h = f(R_0)$ при разных значениях ω (рад/с): 1 — 835; 2 — 760; 3 — 650; 4 — 480.

Для создания стробоскопического эффекта использовался строботаксометр модели СТ-5. Эксперименты проводились на цилиндрическом роторе с внутренним диаметром 0,117 м и высотой 0,046 м, который имел прозрачную крышку из органического стекла с нанесенной на ее поверхность отсчетной сеткой. Для сообщения ротору требуемой угловой скорости вращения использовался привод сепаратора модели АС-2Е.

Из приведенных экспериментальных данных следует, что угловая скорость вращения и радиус заполнения жидкостью ротора существенно влияют на высоту волны, что находится в согласии с уравнениями (15) и (17).

При определенных условиях волновое движение жидкости внутри быстровращающегося цилиндрического сосуда может быть неустойчивым. Действительно, подставив значение χ в соотношение (17), получим биквадратное уравнение, из которого находим

$$\sigma^2 = [(\omega R_0 F k)^2 \pm \sqrt{(R_0 F k)^4 - 16 R_0^3 F^2 k^2}] / (2 R_0 l), \quad (18)$$

где

$$k = \left(1 + \frac{Tn^2}{\rho R_0^3 \omega^2} \right).$$

Из выражения (18) следует, что при значениях

$$16l > R_0 \left(1 + \frac{Tn^2}{\rho R_0^3 \omega^2} \right)^2 f^2 \quad (19)$$

волновое движение поверхностного слоя жидкости в роторе теряет устойчивость. Данное обстоятельство выражается в том, что волна при этом разрушается у гребней.

Указанное явление можно наблюдать с помощью стробоскопического эффекта или фиксировать фотографированием (рис. 3). Для этого использовали ротор цилиндрической формы с внутренним диаметром 0,135 м и высотой 0,1 м. Эксперименты проводились при угловой скорости вращения 785,3 рад/с на приводе сепаратора СПМФ-2000. Радиус заполнения жидкостью (водой) варьировали в зависимости от серии экспериментов в пределах $R_0 = 0,032 - 0,048$ м.

Снимки получали следующим образом. В темноте на внутренней поверхности цилиндрического ротора помещали фотобумагу или фотопленку и приводили во вращение ротор. При заданной угловой скорости вращения внутрь ротора через центральное отверстие в крышке подавали воду при комнатной температуре. При достижении установившегося движения во внутреннее пространство ротора через то же отверстие в крышке вводили матовую электрическую лампу мощностью 40 Вт и с помощью оранжевого светофильтра освещали выдержкой 0,1 с свободную поверхность жидкости. После остановки ротора фотобумага или фотопленка извлекались и обрабатывались химикатами.

Экспериментальные исследования показали, что на свободной поверхности воды внутри цилиндрического ротора при определенных условиях вдоль образующей обечайки возникают стоячие волны, число которых может изменяться в зависимости от радиуса заполнения водой. При этом стоячие волны могут разрушаться у гребней, что согласуется с выводами, вытекающими из (19).



Рис. 3. Изображения свободной поверхности воды в цилиндрическом роторе при угловой скорости вращения 785,3 рад/с и радиусе заполнения водой ротора 0,032 м.

Рассмотрим условие образования стоячих волн внутри ротора. Из уравнения (18) следует, что круговая частота σ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому согласно формуле (6) волны будут распространяться в противоположных направлениях и в соответствии с принципом суперпозиции на свободной поверхности жидкости внутри ротора образуются стоячие волны.

Из равенства $\partial \xi / \partial t = \partial \xi_0 / \partial t$ следует, что радиус возмущенной поверхности жидкости определяется формулой

$$\xi = R_0 + \xi_0, \quad (20)$$

где ξ_0 — величина радиального отклонения возмущенной поверхности от невозмущенной свободной поверхности радиуса R_0 (рис. 1).

Тогда на основании выражения (6) имеем

$$d = 2 R_0 + 2 \gamma \cos(n\theta) \cos(\sigma t), \quad (21)$$

где d — диаметр рассматриваемой точки свободной поверхности жидкости. Выражение (21) указывает на то, что свободная поверхность жидкости покрыта стоячими волнами. Из уравнения (21) вытекают условия образования узлов и пучностей стоячей волны:

$$n\theta = (m + 0,5)\pi, \quad (22)$$

$$n\theta = m\pi, \quad (23)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Следовательно, точки пространства ротора, которые удовлетворяют условию (22), представляют собой узлы стоячих волн на радиусе R_0 . Посередине между двумя соседними узлами будут лежать точки, координаты которых удовлетворяют условию (23). При этом форма свободной поверхности жидкости существенно зависит от угловой скорости вращения и радиуса заполнения жидкостью ротора [11].

Получим уравнение свободной поверхности жидкости внутри ротора. Так как величина $\partial \xi / \partial t$ определяется равенством [10, 11].

$$\partial \xi / \partial t = [1/(\omega^2 R_0)] \partial^2 \varphi / \partial t^2, \quad (24)$$

то из условия $\partial \xi / \partial t = \partial \xi_0 / \partial t$ для ξ_0 будем иметь

$$\xi_0 = [1/(\omega^2 R_0)] \partial \varphi / \partial t. \quad (25)$$

Записав потенциал скорости в виде

$$\varphi = R_n(\chi_r) \exp(\pm \chi_z) \cos(n\theta) \cos(\sigma t), \quad (26)$$

получим

$$\xi = R_0 + a \cos(\sigma t), \quad (27)$$

где

$$a = -(\sigma/(\omega^2 R_0)) R_n(\chi_r) \exp(\pm \chi_z) \cos(n\theta).$$

Из уравнения (27) следует, что свободная поверхность жидкости в роторе покрыта волнами. Форма и характер состояния свободной поверхности жидкости в роторе зависят от угловой скорости, радиуса заполнения жидкостью ротора и внутреннего радиуса ротора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. Наука, М., 1970.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Физматгиз, М., 1963, ч. 1.
3. Соколов В. И. Центрифугирование. Изд. Химия, М., 1976.
4. Ламб Г. Гидромеханика. ОГИЗ, М.—Л., 1947.
5. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. Изд. Мир, М., 1981.
6. Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Изд. ИЛ, М., 1953.
7. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. Изд. Наука, М., 1977.
8. Торосян Д. С. Изв. АН АрмССР, Физика, 19, 25 (1984).
9. Стокер Дж. Волны на воде. Изд. ИЛ, М., 1959.
10. Торосян Д. С. Сб. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1984.
11. Торосян Д. С. ДАН АрмССР, 79, 188 (1984).

ԱՂԻՔՆԵՐԸ ԱՐԱԳ ՊՏՏՎՈՂ ԳԼԱՆԱՁԵՎ ԱՆՈՔՈՒՄ ԳՏԵՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ԱՉԱՏ
ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ

Դ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Պարզված է, որ համասեռ հեղուկի ազատ մակերևույթը արագ պտտվող զլանաձև անոթի ներսում ծածկված է կենտրոնախույզ մակերևույթային ալիքներով: Որոշակի պայմանների դեպքում հեղուկի ազատ մակերևույթի վրա ալիքային շարժումը կարող է լինել անկայուն: Ստացված արդյունքները հաստատված են փորձնականորեն:

WAVES ON THE FREE SURFACE OF A LIQUID IN FAST ROTATING CYLINDRICAL VESSEL

D. S. TOROSYAN

The free surface of a homogeneous liquid in fast rotating cylindrical vessel is covered with centrifugal surface waves. Under definite conditions the wave motion on the free surface of liquid may become unstable. The obtained results were confirmed experimentally.