

УДК 537.311.33

К МЕТОДУ РАСЧЕТА СИЛЬНОПОЛЕВЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛУПРОВОДНИКОВ

М. А. ДИМАКСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 6 июня 1984 г.)

Приводятся преобразования интегралов в выражениях усредненных времен релаксации при ионном, оптическом и междолинном рассеяниях через специальные функции и метод численного расчета сильнополевых характеристик полупроводников.

Сильнополевые характеристики полупроводников вычисляются путем решения кинетического уравнения Больцмана. Одним из методов решения является метод усреднения с использованием смещенного максвелловского распределения [1—3]. В работе [3] показано, что в результате усреднения кинетического уравнения Больцмана по концентрации, волновому числу (импульсу) и энергии в стационарном случае для каждой долины получается следующая система уравнений:

$$-\frac{M n_i}{\tau_{n_{ij}}(T_i)} + \frac{n_j}{\tau_{n_{ji}}(T_j)} = 0, \quad (1)$$

$$E - \frac{\hbar}{e} k_i \left[\frac{M}{\tau_{k_{ij}}(T_i)} + \frac{1}{\tau_{k_i}^{\text{оп}}(T_i)} + \frac{1}{\tau_{k_i}^{\text{ак}}(T_i)} + \frac{1}{\tau_{k_i}^{\text{ион}}(T_i)} + \frac{1}{\tau_{k_i}^{\text{N}}(T_i)} \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{2e\hbar}{3km_i} k_i n_i E - n_i T_i \left[\frac{M}{\tau_{n_{ij}}(T_i)} + \frac{1}{\tau_{n_i}^{\text{оп}}(T_i)} + \frac{1}{\tau_{n_i}^{\text{ак}}(T_i)} \right] + n_j T_j \frac{1}{\tau_{n_{ji}}(T_j)} = 0, \quad (3)$$

где индексы i и j относятся к долинам (Γ , X или L), индексы n , k , g при временах релаксации означают усреднение соответственно по концентрации, волновому числу и энергии, M — число эквивалентных j -минимумов, E — напряженность электрического поля; остальные обозначения являются общепринятыми.

В той же работе [3] приводятся выражения усредненных обратных времен релаксации при рассеянии электронов на оптических и акустических колебаниях решетки, ионизированных и нейтральных (N) атомах примеси и междолинном (ij) рассеянии между неэквивалентными и эквивалентными минимумами. Трудность решения уравнений (1)—(3) связа-

на с тем, что усредненные времена релаксации при ионном, оптическом и междолинном рассеяниях выражаются через интегралы, которые не дают аналитического представления через эффективную температуру электронов (T_l), тем более, что верхние пределы интегрирования простираются до бесконечности. Чтобы обойти эти трудности в настоящей работе выполнены некоторые преобразования и указанные интегралы выражены через специальные функции, что значительно облегчает метод расчета и решения системы уравнений (1)–(3).

Усредненное по волновому числу обратное время релаксации при рассеянии электронов на ионизированных атомах примеси [3] можно записать в виде

$$\frac{1}{\tau_{kl}^{\text{ион}}} = B_l \left[\int_0^{\infty} e^{-x} \ln \frac{x + a_l}{a_l} dx + \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x} dx}{x + a_l} \right], \quad (4)$$

где введены обозначения

$$B_l(m_l, T_l) = \frac{4 \sqrt{\pi} e^4 n_{\text{ион}}}{3 \sqrt{2} \varepsilon_0^2 m_l^{1/2} (k T_l)^{3/2}}, \quad a_l(m_l, T_l) = \frac{\pi e^2 \hbar^2 n}{2 \varepsilon_0 m_l (k T_l)^2}.$$

Первый интеграл в (4) выражается через интегральную показательную функцию [4]:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln \frac{x + a_l}{a_l} dx = -e^{a_l} E_1(-a_l) = e^{a_l} E_1(a_l), \quad (5)$$

второй — через гамма-функцию и интегральную показательную функцию:

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-x} dx}{x + a_l} = a_l e^{a_l} \Gamma(-1, a_l) = 1 + a_l e^{a_l} E_1(-a_l) = 1 - a_l e^{a_l} E_1(a_l). \quad (6)$$

Тогда усредненное время релаксации при ионном рассеянии примет вид

$$\frac{1}{\tau_{kl}^{\text{ион}}} = B_l [(1 + a_l) e^{a_l} E_1(a_l) - 1]. \quad (7)$$

Это выражение легко вычислить при помощи таблиц для заданного значения величины a_l при данной эффективной температуре T_l в каждой долине.

При рассеянии на оптических колебаниях решетки усредненное по волновому числу время релаксации имеет вид [3]

$$\frac{1}{\tau_{kl}^{\text{оп}}} = \frac{\gamma(m_l)}{(k T_l)^{1/2}} \left[I_{1/2, 1/2}(\mp \delta_l) + \frac{\delta_l}{2} \Phi(T_l) \right], \quad (8)$$

а по энергии —

$$\frac{1}{\tau_{\epsilon_l}^{\text{оп}}} = \frac{\gamma(m_l)}{(k T_l)^{1/2}} \frac{\delta_l}{2} \Phi(T_l), \quad (9)$$

где

$$I_{1/2, 1/2}(\mp \delta_l) = e^{\delta_l} \int_{\delta_l}^{\infty} e^{-x} (x - \delta_l)^{1/2} x^{1/2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} (x + \delta_l)^{1/2} x^{1/2} dx, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi(T_l) &= e^{\delta_l} \int_{\delta_l}^{\infty} e^{-x} \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - \delta_l}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \delta_l}} dx - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln \frac{\sqrt{x + \delta_l} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \delta_l} - \sqrt{x}} dx = \\ &= e^{\delta_l} \Phi_1(T_l) - \Phi_2(T_l), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\gamma(m_l) = \frac{4 m_l^{1/2} e^2 \omega_0}{3 \sqrt{2} \pi \hbar} \frac{1}{e^{\delta_l} - 1} - \frac{1}{\epsilon_0}, \quad \delta_0 = \frac{\hbar \omega_0}{k T_0}, \quad \delta_l = \frac{\hbar \omega_0}{k T_l},$$

T_0 — температура решетки.

Усредненные времена релаксации при междолинных рассеяниях между неэквивалентными и эквивалентными минимумами содержат интегралы вида (10):

$$I_{n, m}(\pm \delta_l^{\mp}) = e^{\delta_l} \int_{\delta_l}^{\infty} e^{-x} (x + \delta_l^{\mp})^n x^m dx + \int_0^{\infty} e^{-x} (x + \delta_l^{\pm})^n x^m dx, \quad (12)$$

где введены обозначения

$$\delta_0 = \frac{\hbar \omega_{lj}}{k T_0}, \quad \delta_l^- = \frac{\Delta_{lj} - \hbar \omega_{lj}}{k T_l}, \quad \delta_l^+ = \frac{\Delta_{lj} + \hbar \omega_{lj}}{k T_l},$$

n и m могут принимать значения $1/2$ и $3/2$.

В первом интеграле выражения (10) обозначив $x - \delta_l = z$, а затем в обоих интегралах произведя замену переменной $x = \delta_l \sinh^2 t$, после некоторых преобразований получим

$$\int_0^{\infty} e^{-x} (x + \delta_l)^{1/2} x^{1/2} dx = \frac{\delta_l^2}{8} e^{\frac{\delta_l}{2}} \left[K_2\left(\frac{\delta_l}{2}\right) - K_0\left(\frac{\delta_l}{2}\right) \right], \quad (13)$$

где $K_\nu(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh \nu t dt$ есть модифицированная цилиндрическая

функция Бесселя второго рода мнимого аргумента [4]. Для выполнения численных расчетов функцию Бесселя второго порядка $K_2(z)$ удобно выразить через функции Бесселя первого и нулевого порядков. Для этого воспользуемся рекуррентной формулой [4]

$$z K_{\nu-1}(z) - z K_{\nu+1}(z) = -2\nu K_\nu(z). \quad (14)$$

Тогда

$$I_{1/2, 1/2}(\mp \delta_l) = \frac{\delta_l}{2} e^{\frac{\delta_l}{2}} \left(e^{\frac{\delta_0 - \delta_l}{2}} + e^{-\frac{\delta_0 - \delta_l}{2}} \right) K_1\left(\frac{\delta_l}{2}\right). \quad (15)$$

Произведя в интегралах выражения (12) такую же замену переменных, как и в предыдущем случае, после соответствующих преобразований и использования рекуррентной формулы (14) получим

$$I_{3/2, 1/2} (+\delta_l) = \frac{\delta_l}{2} e^{\frac{\delta_l}{2}} \left[\frac{\delta_l}{2} K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) + \left(2 + \frac{\delta_l}{2} \right) K_1 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) \right], \quad (16)$$

$$I_{1/2, 3/2} (+\delta_l) = \frac{\delta_l}{2} e^{\frac{\delta_l}{2}} \left[\frac{\delta_l}{2} K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) + \left(2 - \frac{\delta_l}{2} \right) K_1 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) \right]. \quad (17)$$

В случае отрицательного знака в левой части (12) нижний предел интегрирования есть $\delta_l^\pm$, что исключает испускание или поглощение фононов с малой энергией. Для этого случая аналогичным образом получаем

$$I_{3/2, 1/2} (-\delta_l) = \frac{\delta_l}{2} e^{-\frac{\delta_l}{2}} \left[\frac{\delta_l}{2} K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) + \left(2 - \frac{\delta_l}{2} \right) K_1 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) \right], \quad (18)$$

$$I_{1/2, 3/2} (-\delta_l) = \frac{\delta_l}{2} e^{-\frac{\delta_l}{2}} \left[\frac{\delta_l}{2} K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) + \left(2 + \frac{\delta_l}{2} \right) K_1 \left(\frac{\delta_l}{2} \right) \right]. \quad (19)$$

В формулах (16)–(19) для краткости верхние индексы при δ_l опущены.

Рассмотрим теперь интегралы в (11). Для $\Phi_2(T_l)$ после замены переменной $x = \delta_l \sinh^2 t$ и некоторых преобразований получим

$$\Phi_2(T_l) = e^{\frac{\delta_l}{2}} K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right), \quad (20)$$

а для $\Phi_1(T_l)$, обозначив $x - \delta_l = z$, а затем произведя замену переменной $z = \delta_l \cosh^2 t$ и используя рекуррентную формулу (14), получим

$$\Phi_1(T_l) = e^{-\frac{\delta_l}{2}} K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right). \quad (21)$$

Следовательно, $\Phi(T_l)$ в (8) и (9) будет иметь вид

$$\Phi(T_l) = e^{\frac{\delta_a}{2}} \left(e^{\frac{\delta_a}{2}} - e^{-\frac{\delta_a - \delta_l}{2}} \right) K_0 \left(\frac{\delta_l}{2} \right). \quad (22)$$

Таким образом, приведенные выше преобразования значительно облегчают работу при выполнении численных расчетов выражений, входящих в систему уравнений (1)–(3). Составив уравнения (1)–(3) для двух или трех долин, т. е. имея систему соответственно из шести или девяти уравнений, для каждой долины можно определить n , k , и T_l , что даст возможность определить подвижность, дрейфовую скорость и коэффициент диффузии электронов, а также плотность тока в зависимости от напряженности электрического поля.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Киракосяну за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левинштейн М. Е., Пожела Ю. К., Шур М. С. Эффект Ганна. Изд. Советское радио, М., 1975.
2. Денис В., Пожела Ю. К. Горячие электроны. Изд. Митис, Вильнюс, 1971.
3. Прохоров Э. Д., Белецкий Н. И. Полупроводниковые материалы для приборов с

- междолинным переносом электронов. Изд. Вища школа, Харьков, 1982.
4. Градштейн И. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. Изд. Наука, М., 1962.

ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐՈՒՄ ՈՒԺԵՂ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Լ. ԴԻՄԱՔՍՅԱՆ

Բերված են իոնական, օպտիկական և միջնավային ջրումների միջինացված սկալարային ժամանակների արտահայտությունների մեջ եղած ինտեգրալների ձևափոխությունները հատուկ ֆունկցիաների միջոցով և կիսահաղորդիչներում ուժեղ էլեկտրական դաշտերի բնութագրերի թվային հաշվարկների հզանակները:

TO THE CALCULATION OF HIGH ELECTRIC FIELD CHARACTERISTICS IN SEMICONDUCTORS

M. L. DIMAKSYAN

Conversions of integrals in the expressions of mean relaxation times for ionized impurity, optical phonon and intervalley scattering are given in terms of special functions and a method for numerical calculation of high electric field characteristics in semiconductors is proposed.