Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 20, вып. 5, 265—272 (1985)

УДК 523.64

ОДНА НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ПРИ АНИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ

А. Х. ХАЧАТРЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

(Поступила в редакцию 24 мая 1984 г.)

Рассматривается нелинейная задача переноса в спектральной линии в предположении о полном перераспределении по частоте с учетом анизотропности элементарного акта рассеяния. Применение известного метода позволяет линеаризовать задачу. Приведены соответствующие построения по линейной задаче анизотропного рассеяния, которые использованы для определения реальной оптической толщины среды.

Нелинейные задачи занимают важное место в теории переноса излучения [1—7]. Они возникают при больших плотностях излучения, когда населенности возбужденных уровней атомов в единичном объеме становятся сравнимыми с числом атомов, находящихся в основном состоянии. Нелинейные трехмерные задачи впервые были решены в работах Енгибаряна [2, 3]. В них был предложен математический метод, который опирается на метод самосогласованных оптических глубин Амбарцумяна [1]. Метод работ [1—3] был применен в [4—7] к решению различных задач переноса в спектральных линиях. Ряд результатов работы [2] был воспроизведен в [6] и в монографии [8].

Нелинейные задачи переноса ранее изучались в основном в предположении об изотропности элементарного акта рассеяния (когда индикатриса рассеяния является сферической). Оказывается, что метод работы [2] может быть применен и к задачам анизотропного рассеяния, чему посвящена настоящая работа.

Нами рассматривается нелинейная задача переноса в спектральной линии в изотермическом слое газа, состоящего из двухуровневых атомов, в предположении о полном перераспределении по частоте с учетом анизотропности элементарного акта рассеяния. Применение метода работ [1. 2] позволяет линеаризовать задачу и свести ее к системе линейных интегральных уравнений. Во втором разделе на основе результатов работы [9] в сочетании с принципом инвариантности Амбарцумяна приводится описание эффективного метода решения задачи переноса анизотропного рассеяния в слое конечной толщины.

1. Пусть плоско-параллельный слой с геометрической толщиной z_0 равномерно заполнен атомами с двумя энергетическими уровнями и со стороны границы $z = 0$ среда освещается внешним излучением, имеющим некоторое спектральное распределение.

Сделаем следующие допущения: а) электронная концентрация постоянна в слое б) имеет место полное перераспределение по частотам, что означает полную независимость частот поглощенного и излученного квантов.

Обозначим через n_k $(k = 1, 2)$ число атомов в 1 см^3 на глубине z:

$$n_1(z) + n_2(z) = n_0. \tag{1}$$

Уравнение переноса в линии при сделанных выше предположениях имеет вид

$$\eta \frac{d\overline{I}(z, x, \eta, \varphi)}{dz} = -\frac{h\nu_0}{4\pi}\left[n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right] B_{12}\alpha(x)\overline{I}(z, x, \eta, \varphi) +$$

$$+ \frac{h\nu_0}{4\pi} A_{21}\alpha(x)\tilde{n}_2(\eta, \varphi), \tag{2}$$

где $\tilde{n}_2(\eta, \varphi) A_{21} d\Omega$ — число спонтанных переходов, в которых излучается квант в телесном угле $d\Omega$ вокруг направления (η, φ), A_{21}, B_{12} — обычные эйнштейновские коэффициенты переходов, $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$ — безразмерная частота, ν_0 — центральная частота линии, $g_k (k = 1,2)$ — статистический вес k-го уровня, $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения, $\overline{I}(z, x, \eta, \varphi)$ — интенсивность излучения, распространяющегося в направлении (η, φ) с частотой x на глубине z.

Уравнение стационарности имеет вид

$$n_1\left[a_{12} + \frac{B_{12}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')\,dx'\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} X(\gamma)\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,d\eta' d\varphi'\right] =$$

$$= \tilde{n}_2(\eta, \varphi)\left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')\,dx'\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,d\eta' d\varphi'\right], \tag{3}$$

где a_{12}, a_{21} — коэффициенты переходов вследствие электронных ударов первого и второго родов, $X(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, причем

$$\cos\gamma = \eta\eta' + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta'^2}\cos(\varphi' - \varphi). \tag{4}$$

Проинтегрировав обе части уравнения (3) по всем направлениям (η, φ), получим

$$n_1\left[a_{12} + \frac{B_{12}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')\,dx'\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,d\eta' d\varphi'\right] =$$

$$= n_2\left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')\,dx'\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,d\eta' d\varphi'\right], \tag{5}$$

где

$$n_2 = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \tilde{n}_2(\eta, \varphi)\, \frac{d\eta d\varphi}{4\pi}.$$

Следуя методу работы [2], перейдем в (2) к новому аргументу τ, значение которого при каждом z зависит также от состояния поля излучения в слое $[0, z]$:

$$d\tau = \frac{h\nu_0}{4\pi}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right) B_{12}\, dz, \quad \tau_0 = \int_0^{z_0} \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right) dz. \tag{6}$$

Обозначим

$$\bar{I}(z, x, \eta, \varphi) = I(\tau, x, \eta, \varphi).$$

Для перехода в (2) к аргументу τ следует из уравнения стационарности (3), (5) определить величину

$$S(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\tilde{n}_2(\eta, \varphi) A_{21}}{\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right) B_{12}}. \tag{7}$$

Оказывается, что, как и в изотропном случае, она выражается через $I(\tau, x, \eta, \varphi)$ линейно, а именно

$$S(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x')\, dx' \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} X(\gamma)\, I(\tau, x', \eta', \varphi')\, d\eta' d\varphi' + \frac{\lambda}{4\pi} S_0, \tag{8}$$

где

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + a_{21} - \frac{g_1}{g_2}a_{12}}, \quad S_0 = \frac{4\pi a_{12}}{B_{12}}.$$

С учетом (3), (5), (6) уравнение (2) принимает вид

$$\eta \frac{dI(\tau, x, \eta, \varphi)}{d\tau} = -\alpha(x)\left[I(\tau, x, \eta, \varphi) - S(\tau, \eta, \varphi)\right] \tag{9}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &I(0, x, \eta, \varphi) = I_0(x, \eta, \varphi) \quad \text{при} \quad \eta > 0, \\ &I(\tau_0, x, \eta, \varphi) = 0 \qquad\qquad\quad \text{при} \quad \eta < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (8), (9) с граничными условиями (10) эквивалентны следующему линейному интегральному уравнению относительно функции источника:

$$S(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\, dx \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{d\eta'}{\eta'}\left[\int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')}{\eta'}\alpha(x)\right) \times\right.$$

$$\times X(\eta, \eta', \varphi'-\varphi) S(\tau', \eta', \varphi') d\tau' + \int_{\tau}^{\tau_0} \exp\left(-\frac{(\tau'-\tau)}{\eta'}\alpha(x)\right) \times$$

$$\times X(\eta, -\eta', \varphi'-\varphi) S(\tau', -\eta', \varphi') d\tau' \Bigg] + \frac{\lambda}{4\pi} S_1(\tau, \eta, \varphi). \tag{11}$$

Здесь

$$S_1(\tau, \eta, \varphi) = S_0 + \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\eta'}\alpha(x')\right) \times$$

$$\times X(\eta, \eta', \varphi'-\varphi) I_0(x', \eta', \varphi') d\eta'.$$

Приведем некоторые известные результаты из линейной теории переноса анизотропного рассеяния.

Обычно в теории переноса анизотропного рассеяния индикатриса рассеяния представляется в виде разложения по полиномам Лежандра [10, 11]

$$X(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} C_i P_i(\cos\gamma), \tag{12}$$

где коэффициенты разложения задаются посредством интеграла

$$C_i = \frac{2i+1}{2} \int_0^{2\pi} X(\gamma) P_i(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma. \tag{13}$$

Представим индикатрису рассеяния в виде

$$X(\gamma) = \sum_{m=0}^{n} q_m(\eta, \eta') \cos m(\varphi'-\varphi), \tag{14}$$

где

$$q_m(\eta, \eta') = (2-\delta_{0,m}) \sum_{i=m}^{n} C_i \overline{P}_i^m(\eta) \overline{P}_i^m(\eta'),$$

$$\overline{P}_i^m(\eta) = \sqrt{\frac{(i-m)!}{(i+m)!}} P_i^m(\eta),$$

$P_i^m(\eta)$ — присоединенная функция Лежандра.

Аналогично представив функцию $S(\tau, \eta, \varphi)$ в форме

$$S(\tau, \eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} S_m(\tau, \eta) \cos m\varphi, \tag{15}$$

для функции $S_m(\tau, \eta)$ получим

$$S_m(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=m}^{n} C_i \overline{P}_i^m(\eta) Q_i^m(\tau) + \frac{\lambda}{4\pi} S_0 \delta_{0,m}, \tag{16}$$

где

$$Q_i^m(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \overline{P}_i^m(\eta) \Bigg[\int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{(\tau-\tau')}{\eta}\alpha(x)\right) \times$$

$$\times S_m(\tau', \eta)\, d\tau' + (-1)^{l+m} \int\limits_{\tau}^{\tau_0} \exp\left(-\frac{(\tau'-\tau)}{\eta}\alpha(x)\right) S_m(\tau', -\eta)\, d\tau'\Bigg] +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx \int\limits_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)}\, \overline{P}_l^m(\eta)\, I_0^m(x, \eta)\, d\eta.$$

Для определения функций $Q_l^m(\tau)$ окончательно получаем следующие системы линейных интегральных уравнений:

$$Q_l^m(\tau) = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=m}^{n} \int\limits_0^{\tau_0} K_{lj}^m(\tau-\tau')\, Q_j^m(\tau')\, d\tau' + Q_{0l}^m(\tau), \tag{17}$$

где элементы матрицы-ядра задаются выражением

$$K_{lj}^m(\tau) = C_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\, dx \int\limits_0^1 \overline{P}_l^m(\eta)\, \overline{P}_j^m(\eta) \exp\left(-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)\right)\left[\frac{\tau}{|\tau|}\right]^{l+j} \frac{d\eta}{\eta}, \tag{18}$$

а свободный член —

$$Q_{0l}^m(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx \int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)\right) \overline{P}_l^m(\eta)\, I_0^m(x, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\lambda}{4\pi} S_0 \delta_{0,m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\, dx \int\limits_0^1 \frac{d\eta}{\eta}\, \overline{P}_l^m(\eta) \int\limits_0^{\tau_0} \exp\left(-\frac{(\tau-\tau')}{\eta}\alpha(x)\right) \times$$

$$\times \left[\frac{(\tau-\tau')}{|\tau-\tau'|}\right]^{l+m} d\tau'. \tag{19}$$

Как известно, связь предельной оптической толщины dy и реальной толщины $d\tau$ слоя с линейной толщиной dz определяется формулами

$$dy = (n_1 + n_2)\frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12}\, dz, \tag{20}$$

$$d\tau = \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right)\frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12}\, dz, \tag{21}$$

откуда

$$dy = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}\, d\tau. \tag{22}$$

Интегрируя (22) по τ от 0 до τ_0 с учетом уравнения стационарности (3), (5), получаем

$$y_0 = \tau_0 + \left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right)\frac{c^2}{2h\nu_0^3} Q(\tau_0), \tag{23}$$

$$Q(\tau_0)=\int_0^{\tau_0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} S(\tau', \tau_0, \eta', \varphi')\, d\tau' \frac{d\eta' d\varphi'}{4\pi}. \tag{24}$$

Если решить уравнения (17) для всех $\tau_0 \leqslant y_0$, а затем по формуле (24) определить $Q(\tau_0)$, то с помощью соотношения (23) можно найти зависимость истинной оптической толщины слоя τ_0 от предельной толщины y_0.

2. В работах [9, 12] предложен метод решения задачи переноса в среде конечной толщины, основанный на установлении связи между решениями задач переноса в полупространстве и в слое конечной толщины. Применением метода этих работ удается найти способ определения реальной оптической толщины среды (в центре линии) для нелинейной задачи анизотропного рассеяния.

Пусть плоско-параллельный слой с геометрической толщиной z_0 освещается внешним излучением $I_0^{\pm}$. Внутренний режим в среде описывается интенсивностями $\hat{I}^{\pm}(z)$, которые являются вектор-функциями.

Уравнения переноса в операторной форме для линейных задач переноса имеют вид

$$\pm\frac{d\hat{I}^{\pm}}{dz}=-A\hat{I}^{\pm}+L^{+}\hat{I}^{\pm}+L^{-}\hat{I}^{\mp}. \tag{25}$$

Граничные условия есть

$$\hat{I}^{+}(0)=I_0^{+},\quad \hat{I}^{-}(z_0)=0.$$

Здесь A — оператор умножения на функцию α/η, $L^{\pm}$ — интегральные операторы:

$$L^{\pm}f(x, \eta, \varphi)=\frac{\lambda}{4\pi}\alpha(x)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}\alpha(x')X(\eta, \pm\eta', \varphi'-\varphi)f(x', \eta', \varphi')\times$$
$$\times\, dx' d\eta' d\varphi'. \tag{26}$$

Пусть ρ — оператор отражения из полупространства. Он является каноническим решением уравнения Амбарцумяна

$$A\rho+\rho A=L^{-}+L^{+}\rho+\rho L^{+}+\rho L^{-}\rho. \tag{27}$$

В [9] рассмотрен симметричный случай (который соответствует случаю $L^{+}=L^{-}$). Путем соответствующих видоизменений этот метод можно распространить на несимметричный случай. Ниже мы вкратце опишем это обобщение.

Интенсивности $\hat{I}_{\infty}^{+}(z)$ и $\hat{I}_{\infty}^{-}(z)$, описывающие внутренний режим полубесконечной среды, связаны соотношением (см. [9])

$$\hat{I}_{\infty}^{-}(z)=\rho\hat{I}_{\infty}^{+}(z). \tag{28}$$

Если оператор ρ известен, то $\hat{I}_{\infty}^{+}(z)$ определяется из следующей задачи Коши

$$\frac{d\hat{I}^{+}_{\infty}}{dz} = [-A + L^{+} + L^{-}\rho]\hat{I}^{+}_{\infty}, \tag{29}$$

$$\hat{I}^{+}_{\infty}(0) = \hat{I}^{+}_{0}.$$

Пусть оператор-функция $Y(z)$ определяется из задачи Коши

$$\frac{dY}{dz} = -GY, \quad Y(0) = J, \tag{30}$$

где J — единичный оператор, $G = A - L^{+} - \rho L^{-}$.

Между внутренними режимами в полубесконечной среде и в слое конечной толщины имеется следующая связь

$$\hat{I}^{+}_{\infty}(z) + \hat{I}^{-}_{\infty}(z) = \hat{I}^{+}_{z_0}(z) + \hat{I}^{-}_{z_0}(z) + Y(z_0)\rho\,(\hat{I}^{+}_{z_0}(z_0 - z) + \hat{I}^{-}_{z_0}(z_0 - z)). \tag{31}$$

Интегрируя (31) по z от 0 до z_0, получаем

$$Q(z_0) = (J + Y(z_0)\rho)^{-1}\int\limits_{0}^{z_0}(\hat{I}^{+}_{\infty}(z) + \hat{I}^{-}_{\infty}(z))\,dz. \tag{32}$$

Таким образом, знание операторов Y и ρ, а также внутреннего режима полубесконечной среды позволяет определить функцию $Q(z_0)$, что, в свою очередь, дает возможность найти истинную оптическую толщину среды.

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю Н. Б. Енгибаряну за постановку задачи и ценные указания, а также А. Р. Мкртчяну и Р. С. Варданяну за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян В. А.* Сб.: Теория звездных спектров. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Енгибарян Н. Б.* Астрофизика, 1, 297 (1965).
3. *Енгибарян Н. Б.* Астрофизика, 2, 51 (1966).
4. *Варданян Р. С., Енгибарян Н. Б.* ДАН АрмССР, 3, 135 (1969).
5. *Теребиж В. Ю.* Астрофизика, 3, 281 (1967).
6. *Абрамов Ю. Ю., Дыхне А. М., Напартович А. П.* ЖЭТФ, 52, 536 (1967).
7. *Варданян Р. С.* Ученые записки ЕГУ, вып. 2, 37 (1971).
8. *Иванов В. В.* Перенос излучения и спектры небесных тел. Изд. Наука, М., 1969.
9. *Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А.* ДАН СССР, 217, 533 (1974).
10. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. Изд. Наука, М., 1972.
11. *Енгибарян Н. Б., Никогосян А. Г.* Астрофизика, 8, 71 (1971).
12. *Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А.* Мат. заметки, 19, 927 (1976).

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՑՐՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴԻՐ

Ա. Խ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Դիտարկված է սպեկտրալ գծում տեղափոխման ոչ գծային ոչ իզոտրոպ ցրման խնդիր, ենթադրելով ըստ հաճախությունների լրիվ վերաբաշխում։ Հայտնի մեթոդի կիրառումը հնարավորություն է տալիս գծայնացնել խնդիրը։ Հոդվածում բերված են ոչ իզոտրոպ ցրման գծային խնդիրների համապատասխան կառուցումներ, որոնք օգտագործվում են միջավայրի ռեալ օպտիկական հաստությունը որոշելու համար։

ON THE PROBLEM OF NONLINEAR TRANSFER IN CASE OF ANISOTROPIC SCATTERING

A. Kh. KHACHATRYAN

Under the assumption of complete frequency redistribution, the nonlinear problem of transfer in the spectral line was considered taking into account the anisotropy of an elementary scattering event. The application of the methods of Refs. [1, 2] permitted to linearize the problem. The construction of the linear problem of anisotropic scattering used for the determination of real optical thickness of the medium is described.