Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 20, вып. 4, 191—199 (1985)

УДК 538.56;539.12

РАСЧЕТ СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЗИТРОНАМИ И ЭЛЕКТРОНАМИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЙ ПРИ ПЛОСКОСТНОМ КАНАЛИРОВАНИИ В КРИСТАЛЛАХ ТИПА АЛМАЗА

А. Р. АВАКЯН, ЯН ШИ

Ереванский физический институт

Н. К. ЖЕВАГО

Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова

(Поступила в редакцию 20 августа 1983 г.)

В приближении усредненного потенциала атомных плоскостей вычислены спектры излучения электронами и позитронами больших энергий в кристаллах алмаза и кремния без учета эффектов деканалирования. Сравнение результатов расчета для позитронов с аналогичным расчетом с использованием параболического потенциала показывает, что параболический потенциал является достаточно хорошим приближением для плоскостей (110) алмаза. С другой стороны, превышение теоретических значений интенсивности излучения над экспериментальными данными указывает на существенную роль эффектов деканалирования. В случае электронов расчет хорошо согласуется с соответствующими экспериментальными результатами.

В ряде работ [1—4] была развита теория излучения при плоскостном каналировании релятивистских частиц в кристаллах, основанная на различных моделях для непрерывных потенциалов плоскостей. Приближение параболического потенциала [2], которое оказалось удовлетворительной аппроксимацией плоскостных потенциалов в случае позитронов, совершенно непригодно в случае электронов. А для потенциала некоторых кристаллографических плоскостей (например (111)) простое аналитическое представление вообще отсутствует. Для других моделей, отличных от параболы, практически невозможно получить достаточно простые аналитические выражения для спектрально-угловой плотности интенсивности излучения с учетом недипольного характера излучения. В таких случаях единственным методом остается численное интегрирование уравнений движения частиц в непрерывном потенциале плоскостей. Этот метод используется и в настоящей работе для расчета спектров излучения частицами с энергией порядка 10^9—10^{10} эВ и сравнения этих спектров с результатами соответствующих экспериментов.

В качестве потенциала изолированного атома нами используется приближение Мольера. Усреднение по координатам в кристаллографической плоскости и тепловым колебаниям атомов относительно плоскости, как известно [5], приводит в этом случае к следующему выражению для эффективного потенциала одной плоскости:

$$U_1(x) = \xi \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \exp(\tau_i) \{\exp(-\beta_i x/a_T) \operatorname{erfc}(x_i^-) +$$

$$+ \exp(\beta_i x/a_T) \operatorname{erfc}(x_i^+)\},$$

$$x_i^{\mp} = (\beta_i u/a_T \pm x/u)/\sqrt{2}, \quad \xi = \pi n Z e^2 a_T,$$

$$\gamma_i = \alpha_i/\beta_i, \quad \tau_i = (\beta_i u/a_T)^2/2,$$

$$\alpha_i = \{0{,}1;\ 0{,}55;\ 0{,}35\}, \quad \beta_i = \{6;\ 0{,}1;\ 3\},$$

$a_T = 0{,}4685\, Z^{-1/3} \cdot 10^{-8}$ см — радиус Томаса—Ферми, u^2 — среднее квадратичное отклонение атома кристаллической плоскости, n — плотность атомов в плоскости, $\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительная функция ошибок.

Как известно (см., например, [6]), движение частицы в направлении, перпендикулярном к кристаллографическим плоскостям, с точностью порядка $(U_0/E)^2$ (U_0 — глубина потенциальной ямы, E — энергия частицы) описывается уравнением

$$\frac{E}{c^2}\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx},$$

где $U(x)$ — потенциальная энергия частицы, которая определяется суммарным потенциалом плоскостей рассматриваемого семейства. При этом продольная скорость $\dot{z}$ ультрарелятивистской частицы определяется из уравнения

$$\dot{z} \approx c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\gamma^{-2} + \left(\frac{v_x}{c}\right)^2\right)\right], \quad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}, \tag{3}$$

которое является следствием закона сохранения продольного импульса.

Согласно (2) поперечная энергия ε является интегралом движения в усредненном потенциале плоскостей:

$$\varepsilon = \frac{E}{2}\left(\frac{v_x}{c}\right)^2 + U(x). \tag{4}$$

Ее значение определяется углом θ_0 и координатой x_0 влета частицы в кристалл: $\varepsilon = E\theta_0^2/2 + U(x_0)$.

Поскольку потенциал является периодической функцией с пространственным периодом d, равным расстоянию между соседними плоскостями, то выполняются равенства

$$\begin{gathered} \mathbf{v}(t+T) = \mathbf{v}(t), \quad x(t+T) = x(t) + \langle v_x \rangle T, \\ z(t+T) = z(t) + \langle v_z \rangle T, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\langle v_z \rangle = T^{-1} \int_0^T v_z(t)\, dt \approx c\,(1 - \gamma^{-2}/2 - w(T)/2T)$$

— средняя по периоду продольная скорость частицы $\left(w(t) = \int_0^t (v_x/c)^2\, dt\right)$.

Для каналированных частиц средняя поперечная скорость $\langle v_x \rangle = 0$, для надбарьерных частиц $\langle v_x \rangle = d/T$. Период T столкновений частицы с плоскостями определяется формулами:

$$T = 4(E/2)^{1/2} \int_0^{x_m} (\varepsilon - U(x))^{-1/2} dx \qquad (6)$$

— для каналированных частиц и

$$T = 2(E/2)^{1/2} \int_0^{d/2} (\varepsilon - U(x))^{-1/2} dx \qquad (7)$$

— для надбарьерных частиц. Здесь $x = x_m$ — точка поворота в поперечном движении, $x = 0$ соответствует минимуму потенциала $U(x)$.

Спектральное распределение энергии излучения частицы за все время взаимодействия с кристаллографическими плоскостями определяется хорошо известной формулой классической электродинамики

$$\frac{1}{\hbar} \frac{dW}{d\omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \omega^2 \int |\mathbf{n} \times \mathbf{J}|^2 d\Omega, \qquad (8)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$, ω — частота излучения, $\mathbf{n} = \{\theta \sin\varphi,\ \theta \cos\varphi,\ \cos\theta\}$ — единичный вектор в направлении излучения, полярный угол θ отсчитывается от оси z, азимутальный угол φ—от плоскости (yz), $d\Omega = \sin\theta d\theta\, d\varphi$,

$$\mathbf{J} = c^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}(t) \exp[i\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)]\, dt.$$

В случае, когда частица при движении в кристалле успевает совершить большое число колебаний $N = l/T$ (где l — толщина кристалла), подынтегральная функция в (8) содержит ряд резких интерференционных максимумов и в пределе $N \to \infty$ может быть представлена в виде суммы соответствующих δ-функций. Тогда спектральное распределение энергии излучения, отнесенное к длине l пути частицы, можно представить в виде разложения по гармоникам:

$$\frac{1}{l\hbar} \frac{dW}{d\omega} = \frac{\alpha\omega}{2\pi c} \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{n} \times \mathbf{j}|^2 \delta\left(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\langle\mathbf{v}\rangle}{c} - \frac{2\pi k}{\omega T}\right) d\Omega, \qquad (9)$$

$$\mathbf{j} = (Tc)^{-1} \int_0^T \mathbf{v}(t) \exp[i\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)]\, dt. \qquad (10)$$

Интегрируя (9) по полярному углу и переходя далее в (10) от интегрирования по времени к интегрированию по поперечной координате x, получаем спектральное распределение в виде, более удобном для дальнейших расчетов:

$$\frac{1}{l\hbar} \frac{dW}{d\omega} = \frac{4\alpha\omega}{\pi c} \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{F(\theta_k^+)\theta_k^+ + F(\theta_k^-)\theta_k^- \eta(\theta_k^-)}{\theta_k^+ - \theta_k^-} d\varphi. \qquad (11)$$

Здесь

$$F(\theta_k) = (j_z \theta_k \sin\varphi - j_x)^2 + j_z^2 \theta_k^2 \cos^2\varphi, \tag{12}$$

$\eta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, а величины $\theta_k^\pm$, j_x и j_z для каналированных частиц определяются формулами

$$\theta_k^\pm = \pm [4\pi k/\omega T - \gamma^{-2} - w(T)/T]^{1/2},$$

$$j_x = 4(cT)^{-1} \int_0^{x_m} \cos(A_k(x) + \delta_k)\cos(B_k(x) + \delta_k)\, dx, \tag{13}$$

$$j_z = 4T^{-1} \int_0^{x_m} \sin(A_k(x) + \delta_k)\sin(B_k(x) + \delta_k)\, v_x^{-1}\, dx,$$

$$v_x = c(2/E)^{1/2}[\varepsilon - U(x)]^{1/2},$$

$$\delta_k = \begin{cases} 0 \text{ — при нечетных значениях } k \\ \pi/2 \text{ — при четных значениях } k. \end{cases}$$

Для надбарьерных частиц соответствующие значения этих величин следующие:

$$\theta_k^\pm = \frac{d\sin\varphi}{cT} \pm \left[\frac{d^2\sin^2\varphi}{c^2T^2} + \frac{4\pi k}{\omega T} - \gamma^{-2} - \frac{w(T)}{T}\right]^{1/2},$$

$$j_x = 2(cT)^{-1} \int_0^{d/2} \cos(A_k(x) - C_k(x))\, dx, \tag{14}$$

$$j_z = 2T^{-1} \int_0^{d/2} \cos(A_k(x) - C_k(x))\, v_x^{-1}\, dx.$$

В формуле (11) суммирование начинается со значения k_0, при котором выражение, стоящее под знаком корня в (13) или (14), принимает положительное значение. Функции $A_k(x)$, $B_k(x)$ и $C_k(x)$, входящие в (13) и (14), определяются формулами

$$A_k(x) = 2\pi k t(x)/T + \omega[w(t(x)) - t(x)\, w(T)/T]/2,$$

$$B_k(x) = \omega x c^{-1} \theta_k \sin\varphi, \tag{15}$$

$$C_k(x) = \omega c^{-1}(x - t(x)\, d/T)\, \theta_k \sin\varphi,$$

$$t(x) = c^{-1}(E/2)^{1/2} \int_{x_0}^{x} [\varepsilon - U(x)]^{-1/2}\, dx.$$

С помощью формул (11)—(13) были рассчитаны спектральные распределения энергии излучения позитронами (рис. 1, 2) и электронами (рис. 3). Спектры усреднялись по точкам влета частиц в кристалл, которые считались распределенными равномерно в интервале $0 < x_0 < d$. При этом отклонение потенциала плоскости от среднего значения (1) и связанные с этим эффекты деканалирования не учитывались.

На рис. 1 представлены спектры в случае позитронов, влетающих под нулевым углом к плоскости (110) алмаза толщиной 80 мкм. Наряду с ре-

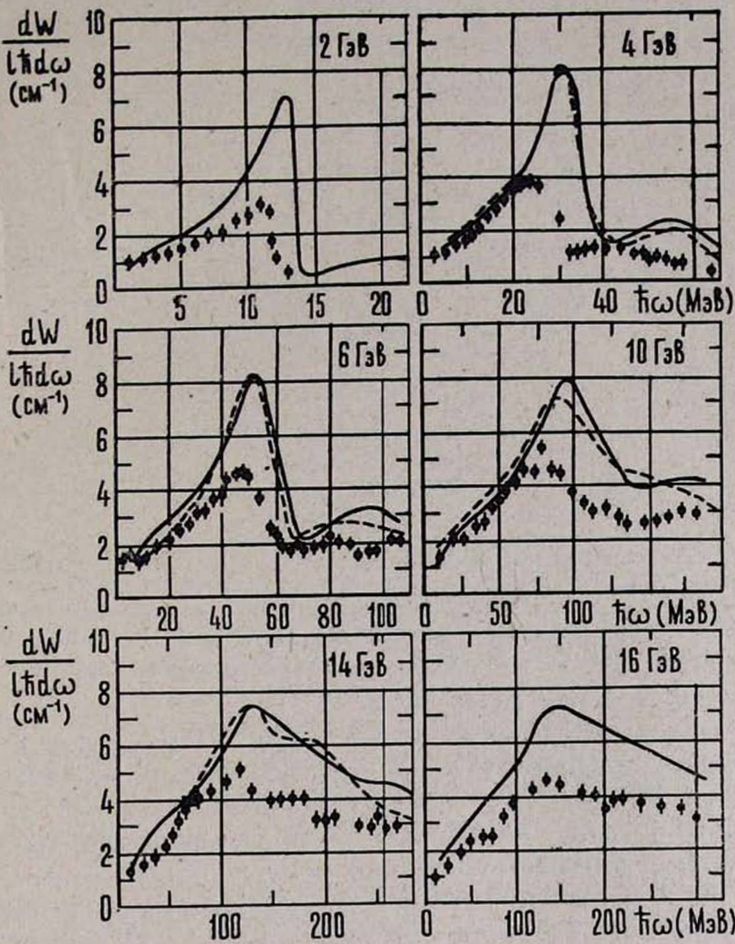

Рис. 1. Частотный спектр энергии излучения позитронами на единице пути, каналированными в плоскостях (110) кристалла алмаза ($U_0 = 24{,}6$ эВ) толщиной 80 мкм. Энергии позитронов указаны на графиках. Сплошные кривые — расчет настоящей работы, точки — эксперимент [7], штриховые кривые — расчет в приближении параболического потенциала [2] без учета эффектов деканалирования.

зультатами наших численных расчетов (сплошные кривые) приведены также результаты соответствующих аналитических расчетов [2], основанных на приближенной модели межплоскостного потенциала* в виде параболы (штриховые кривые), и результаты эксперимента (точки), проведенного Авакяном и др. в СЛАКе [7].

---

* Аналогичные расчеты без учета эффектов деканалирования проводились также авторами работ [3] и [4].

Как видно из сравнения представленных теоретических результатов, в случае алмаза параболический потенциал является достаточно хорошим приближением к реальному межплоскостному потенциалу.

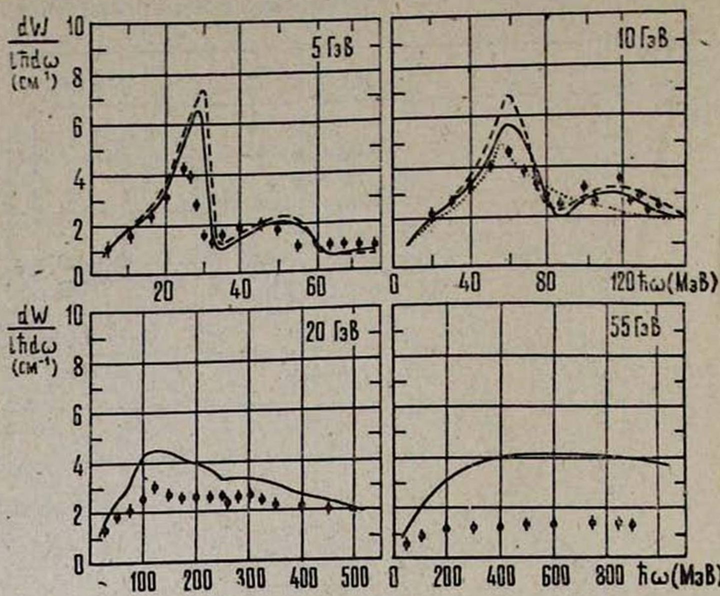

Рис. 2. То же, что на рис. 1, для кристалла кремния (U_0 = 24,9 эВ) толщиной 100 мкм. Экспериментальные точки взяты из [8], штриховые кривые — расчет [8], точечная кривая — расчет в приближении параболического потенциала [9].

Превышение рассчитанных нами значений интенсивности излучения над экспериментальными указывает на заметную роль эффектов деканалирования в указанных экспериментах. К такому же выводу пришли авторы работы [2], где был проведен также дополнительный расчет спектров с учетом деканалирования позитронов.

На рис. 2 сплошными кривыми представлены результаты наших расчетов спектральной плотности энергии излучения на единице пути позитронами различных энергий, входящими под нулевым углом к плоскостям (110) кристалла кремния толщиной 100 мкм. Штриховыми кривыми представлены результаты аналогичных (основанных на усредненном потенциале плоскостей) численных расчетов, проведенных независимо в работе [8]. При этом в отличие от настоящей работы усредненный потенциал плоскости в [8] вычислялся не на основе модели Мольера, а на основе модели Дойла—Тернера для потенциала атома. Имеющееся различие между результатами сравниваемых расчетов в данном случае указывает на чувствительность спектров излучения каналированных частиц к выбору модели потенциала изолированных атомов плоскости. Оно остается несмотря на проведенное усреднение потенциала атомов по координатам в плоскости.

Точками на рис. 2 показаны результаты соответствующих экспериментов, выполненных недавно в ЦЕРНе [8]. Заметное превышение вычисленных значений интенсивности излучения над экспериментальными в основном обусловлено значительной начальной угловой расходимостью позитронного пучка в эксперименте [8], которая не учитывалась в расчетах. В особенности этот эффект заметен при энергии позитронов 55 ГэВ, когда критический угол для плоскостного каналирования был наименьшим.

На рис. 3 представлены результаты расчета спектров излучения электронами (сплошные кривые) и результаты соответствующих экспериментов, выполненных в Ереванском физическом институте [10] и в ЦЕРНе

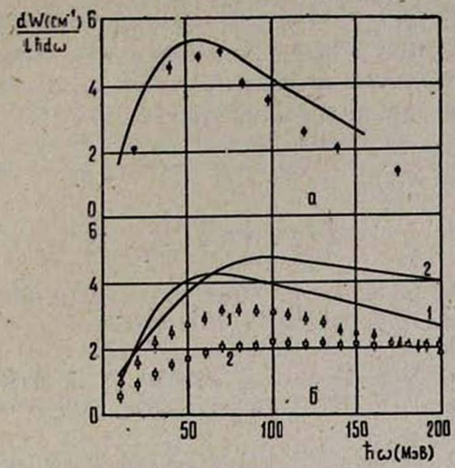

Рис. 3. *а*) Частотный спектр излучения электронами, каналированными в плоскостях (110) кристалла алмаза толщиной 100 мкм. Энергия электронов — 4,7 ГэВ, угол падения на плоскости $\theta_0 = 0$. Сплошная кривая — расчет, точки — соответствующие экспериментальные результаты [10]. *б*) Частотный спектр изучения электронами, каналированными в плоскостях (110) кристалла кремния толщиной 10 мкм. Цифры 1 и 2 соответствуют энергиям электронов 7 и 10 ГэВ. Сплошные кривые — расчет для $\theta_0 = 0$, треугольники и квадратики — соответствующие экспериментальные результаты [8].

[8]. Поскольку плоскостной потенциал для электронов существенно отличается от гармонического, характерные частоты излучения отдельного каналированного электрона существенно зависят от значения его поперечной энергии и, следовательно, от точки его влета в кристалл. Такая зависимость приводит к сглаживанию максимума в спектре излучения после усреднения спектров по точкам влета частиц в кристалл. Видно, что рассчитанные спектры излучения электронов, движущихся в режиме плоскостного каналирования ($\theta_0 = 0$), действительно не имеют четко выделенного максимума, в отличие от рассмотренного выше случая позитронов. По характеру спектров наши расчеты согласуются с соответствующими экспериментальными результатами [10, 8].

Необходимо, однако, иметь в виду, что расчеты нами проводились без учета начальной угловой расходимости пучка электронов и эффектов деканалирования, которые практически всегда имеют место в экспериментах. Поскольку критический угол Линдхарда для плоскостного каналирования убывает с ростом энергии электронов, то влияние начальной угловой расходимости пучка должно сказываться заметнее при более высоких энергиях. Возможно, что этим объясняется недостаточно хорошее количественное согласие расчета с экспериментом при энергии электронов $E = 10$ ГэВ [8] (рис. 3б).

С другой стороны, достаточно хорошее согласие проведенного нами расчета с экспериментальными данными [10] (рис. 3а), по-видимому, объясняется наличием в этом эксперименте коллимации при регистрации фотонов, вышедших из кристалла. Угол коллимации был порядка угла Линдхарда, поэтому регистрировались в основном фотоны, испущенные каналированными электронами. Фотоны же, испущенные надбарьерными электронами (как влетевшими в кристалл под углами, бо́льшими критического, вследствие расходимости падающего пучка электронов, так и вышедшими из режима каналирования вследствие рассеяния), не попадали в регистрирующий прибор.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кумахов М. А.* Phys. Lett., 57, 17 (1976); ДАН СССР, 230, 1070 (1976).
2. *Базылев В. А., Жеваго Н. К.* ЖЭТФ, 73, 1097 (1977).
   Жеваго Н. К. ЖЭТФ, 75, 1389 (1978).
   Базылев В. А., Глебов В. И., Жеваго Н. К. ЖЭТФ, 78, 62 (1980).
   Базылев В. А. и др. ДАН СССР, сер. физ., 253, 1100 (1980); ЖЭТФ, 80, 608 (1981).
3. *Шульга Н. Ф., Гендеништейн Л. Э., Мирошниченко И. И.* ЖЭТФ, 82, 50 (1982).
   Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П. Письма в ЖЭТФ, 6, 1037 (1980).
4. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.* ДАН СССР, 266, 605 (1982).
5. *Gemmell D. S.* Rev. Mod. Phys., 46, 129 (1974).
6. *Базылев В. А., Жеваго Н. К.* УФН, 137, 605 (1982).
7. *Авакян Р. О., Мерри Д. Д., Мирошниченко И. И., Фигут Т. Х.* ЖЭТФ, 82, 1825 (1982).
8. *Atkinson M. et al.* CERN—EP/82—03, 1982.
   Back J., Komarov F., Meyer Ph. CERN/PSCC/82—94, 1982.
9. *Filatova N. A. et al.* Fermi—Pub—81/34—EXP 7850.507—11; NIM, 194, 239 (1982).
10. *Авакян Р. О.* и др. ЯФ, 35, 387 (1982).

ՄԵԾ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ԵՎ ՊՈԶԻՏՐՈՆՆԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՍՊԵԿՏՐՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ԱԼՄԱՍՏԻ ՏԻՊԻ ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐՈՒՄ ՀԱՐԹ ԿԼԱՆՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Հ. Ռ. ԱՎԱԳՅԱՆ, ՅԱՆ ՇԻ, Ն. Կ. ԺԵՎԱԳՈ

Ալմաստի և սիլիցիումի բյուրեղներում ատոմական հարթությունների միջինացված պոտենցիալի մոտավորությամբ հաշվված են մեծ էներգիայի էլեկտրոնների և պոզիտրոնների ճառագայթման սպեկտրները առանց ապականալացման էֆեկտների հաշվի առման։ Պոզիտրոնների դեպքում հաշվարկների համեմատությունը պարաբոլական պոտենցիալով կատարված նմանատիպ հաշվարկի հետ ցույց է տալիս, որ պարաբոլական պոտենցիալը բավականաչափ լավ մոտավորություն է ալմաստի (110) հարթությունների համար։ Մյուս կողմից, ճառագայթման ինտենսիվության տեսական արժեքների գերազանցումը փորձնական տվյալների նկատմամբ մատնանշում է ապականալացման էֆեկտների որոշիչ դերը։ Էլեկտրոնների ճառագայթման տեսական հաշվարկները լավ համընկնում են համապատասխան փորձնական տվյալների հետ։

CALCULATION OF RADIATION SPECTRA OF HIGH ENERGY ELECTRONS AND POSITRONS AT PLANAR CHANNELING IN DIAMOND-LIKE CRYSTALS

H. R. AVAKYAN, C. YANG, N. K. ZHEVAGO

The radiation spectra from high energy electrons and positrons were calculated in the approximation of averaged potential of atomic planes in diamond and silicon crystals regardless of dechanneling effects. A comparison of calculations for positrons with parabolic potential calculations shows that the parabolic potential provides sufficiently good approximation for (110) planes of the diamond crystal. On the other hand, the excess of theoretical values of the radiation intensity over the experimental ones is an indication of the decisive role of dechanneling effects. In the case of electrons the calculations agree fairly well with appropriate experimental data.