

УДК 621.371.399

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТМ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Х. С. АРУТЮНЯН, К. А. БАРСУКОВ

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

(Поступила в редакцию 5 мая 1984 г.)

Получены точные решения уравнений Максвелла для модели среды с диэлектрической проницаемостью, обладающей квадратичной зависимостью от модуля напряженности электрического поля, в предположении, что решение имеет вид гармонической волны с поперечной ориентацией магнитного поля. Исследованы области существования решения и показано, что существуют уединенные волны как с непрерывными, так и с разрывными полями, а также решения в виде неоднородных плоских волн с пространственно периодической зависимостью по поверхности постоянной фазы волны.

Для ряда физических явлений (оптический эффект Керра, электрострикция, частичная ионизация вещества полем электромагнитной волны и т. п.) зависимость диэлектрической проницаемости вещества можно аппроксимировать квадратом амплитуды электрического вектора, усредненного по времени. Для гармонических полей при такой аппроксимации диэлектрическая проницаемость не зависит от времени. Распространение в этом случае стационарной волны типа ТМ, имеющей продольную и поперечную составляющие электрического вектора, имеет ряд особенностей [1]. Эти особенности исследованы в [2] методом фазовой плоскости, позволяющим понять качественную сторону явления. Численное исследование на ЭВМ для ограниченных значений параметров нелинейной среды проведено в [3]. Вместе с тем здесь возможно построение точных решений уравнений Максвелла для нелинейных стационарных ТМ волн, допускающих конструктивное исследование особенностей этих волн и сводящих вычисление полей к простым квадратурам.

Рассмотрим решение уравнений Максвелла для модели непоглощающей среды с диэлектрической постоянной вида

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 2\alpha |\vec{E}|^2, \quad \varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \alpha = \alpha(\omega). \quad (1)$$

Пусть векторы электромагнитной волны имеют вид

$$E_x = e_x(x) \sin \frac{\omega}{c} (ct - xz) = \frac{x}{\varepsilon} H_y, \quad (2)$$

$$E_z = e_z(x) \cos \frac{\omega}{c} (ct - xz).$$

Функции e_x, e_z удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{d^2 e_z}{d\tilde{z}^2} + x \frac{de_x}{d\tilde{z}} + \varepsilon e_z = 0, \quad x \frac{de_x}{d\tilde{z}} + (x^2 - \varepsilon) e_x = 0, \quad (3)$$

где

$$\tilde{z} = k_0 x, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha (e_x^2 + e_z^2).$$

Уравнения (3) допускают первый интеграл вида

$$\left(\frac{de_z}{d\tilde{z}} \right)^2 = x^2 e_x^2 - \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \alpha e^2 \right) e^2 + C, \quad (4)$$

где $e^2 = e_x^2 + e_z^2$, который вместе со вторым уравнением системы (3) позволяет найти все компоненты поля как функции параметра e^2 :

$$e_x^2 = \frac{x^2 (2\varepsilon_0 + \alpha e^2) \alpha e^2 - x^2 C_1}{2\alpha (\varepsilon_0 + \alpha e^2) (2x^2 - \varepsilon_0 - \alpha e^2)}, \quad C_1 = \frac{2x}{x^4} C, \quad (5)$$

$$e_z^2 = \frac{[x^2 (3\alpha e^2 + 2\varepsilon_0) - 2(\varepsilon_0 + \alpha e^2) \alpha e^2] x e^2 + x^2 C_1}{2\alpha (\varepsilon_0 + \alpha e^2) (2x^2 - \varepsilon_0 - \alpha e^2)},$$

и второй интеграл

$$x\tilde{z} = \pm \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\tau^3 - 3\tau^2 + a^3 + C_1) d\tau}{\tau(\tau - 2) \sqrt{[(\tau - a)(3\tau - 2\tau^2 - a) + C_1] (\tau^2 - a^2 - C_1)}}, \quad (6)$$

где $x^2 \tau = \varepsilon_0 + \alpha e^2$, $x^2 a = \varepsilon_0$ и τ_0 — постоянная интегрирования.

Соотношение (6) определяет зависимость квадрата амплитуды электрического поля от координаты $\tilde{z}$, а через (5) и зависимость компонент поля от x . Интеграл (6) через элементарные функции не выражается и представляет собой сложную комбинацию эллиптических функций.

Остановимся сначала на случае $C_1 = 0$. Области в переменных (τ, a) , где существует интеграл (6), а следовательно существуют и решения системы (3), изображены на рис. 1. В области 1 всюду имеются непрерывные решения, обладающие непрерывными производными и исчезающие на бесконечности. То же можно сказать об областях 2 и 3, где, однако, поле на бесконечности только ограничено. Области 4 и 7 пересекаются кривой $a = \pm \tau (3 - \tau)^{1/2}$, на которой терпят разрыв первого рода либо производные компонент поля, либо сами поля, и в них нельзя сконструировать решение системы (3), непрерывное во всем пространстве. Для областей 5 и 6 характерно наличие точек с бесконечными значениями напряженностей полей, и они лишены физического смысла.

Очевидно, что в области 1 ($0 \leq a \leq 1$) существуют волноводные типы решений системы (3), а в областях 2 и 3 — периодические по координате x решения. Для всех этих областей $a > 0$ и нелинейность положительна. Интеграл в (6) достаточно просто считается на ЭВМ, что дает возможность найти все компоненты поля. В частном случае $a = 0$ ($\varepsilon_0 = 0$) этот интеграл выражается через элементарные функции:

$$k_0 x \operatorname{sign} x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} e_m} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2/e_m^2}}{1 - \sqrt{1 - e^2/e_m^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \sqrt{1 - e^2/e_m^2} \right], \quad (7)$$

где e_m — максимальное значение напряженности электрического поля.

Для области 1 волноводного распространения графики распределения компонент напряженности электрического поля аналогичны графикам работы [1]. Отметим, что эффективная ширина волноводного канала увеличивается с увеличением αe_m^2 . Постоянная распространения $\kappa > \sqrt{\epsilon_0}$, и волна в этой области является «медленной» по отношению к плоской

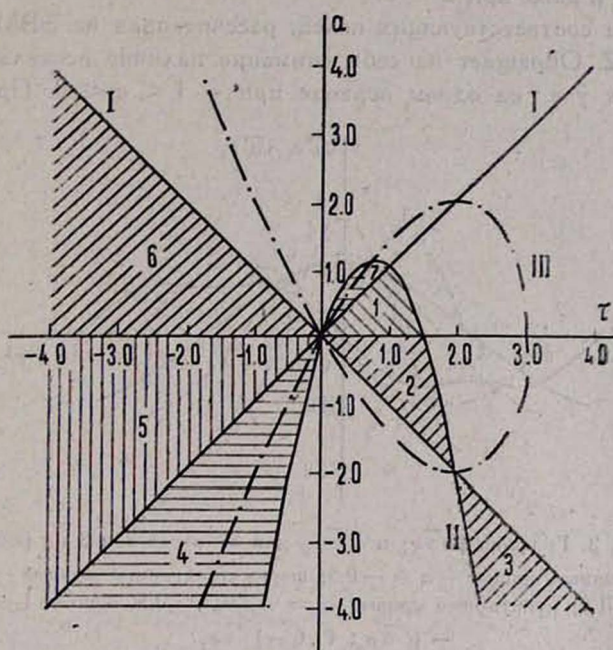


Рис. 1. Области существования интеграла (6): кривая I — $a = \pm \tau$; кривая II — $a = 3\tau - \tau^2$; кривая III — $a = \pm \tau(3 - \tau)^{1/2}$.

волне в диэлектрике с постоянной ϵ_0 . Постоянная κ оказывается зависящей от максимального значения напряженности электрического поля и определяется по максимуму поля при $e_z = 0$ из (5):

$$\kappa^2 = \frac{2(\epsilon_0 + \alpha e_m^2)^2}{3\alpha e_m^2 + 2\epsilon_0}. \quad (8)$$

Для областей 2 и 3 $\epsilon_0 < 0$, но $\epsilon = \epsilon_0 + \alpha e^2 > 0$. Все амплитуды в (2) оказываются периодическими функциями x и их период l определяется соотношением

$$\kappa l = \Phi(a), \quad (9)$$

где

$$\Phi(a) = \left| \int_{-a}^{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{a}{2}}} \frac{(\tau^3 - 3\tau^2 + a^2) d\tau}{\tau(\tau - a)(\tau - 2)\sqrt{(\tau + a)(3\tau - 2\tau^2 - a)}} \right|. \quad (10)$$

Таким образом, решения системы (3) представляют собой аналог неоднородной плоской волны, амплитуда которой периодически меняется вдоль плоскости постоянной фазы.

Возникающая здесь ситуация аналогична картине поля для ТМ мод в диэлектрике с постоянной ϵ_0 в плоском волноводе, если это поле аналитически продолжить на все пространство. Оно оказывается суперпозицией двух плоских волн с равными амплитудами A , волновые векторы которых образуют одинаковые углы φ с осью z и имеют проекции разных знаков на ось x . Постоянная в первом интеграле (4) в этом случае есть $C = A^2 \epsilon_0 \sin^2 \varphi$. Для нелинейных сред решения рассмотренного вида возможны при $\epsilon_0 < 0$ и даже при $C = 0$.

Структура соответствующих полей, рассчитанная на ЭВМ, представлена на рис. 2. Обращает на себя внимание наличие нескольких экстремальных точек y e на одном периоде при $-1 < a < 0$. При $a < -1$

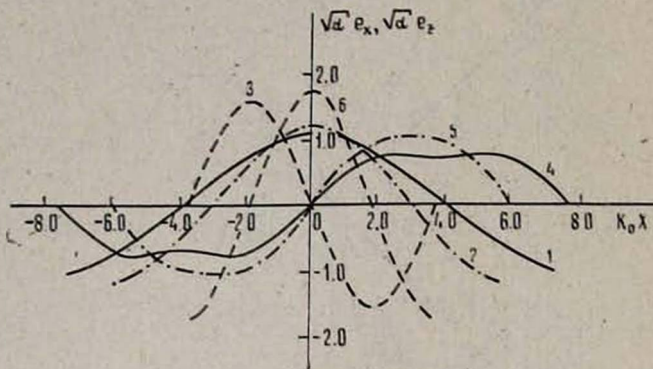


Рис. 2. Графики $\sqrt{a} e_x$ и $\sqrt{a} e_z$ для областей 2 и 3 на рис. 1: сплошные кривые — $a = -0,5$; штрих-пунктирные кривые — $a = -1,0$; пунктирные кривые — $a = -3,0$; $x^2 = 0,5$. Кривые 1—3 — $-\sqrt{a} e_x$, 4—6 — $\sqrt{a} e_z$.

структура поля в поперечном к оси z направлении носит почти синусоидальный характер. Постоянная распространения для рассматриваемых типов волн по-прежнему определяется соотношением (8) для области 2, в то время как для области 3 в (8) под e_m надо понимать минимальное значение напряженности электрического поля. Заметим, что существуют пороговые значения напряженности электрического поля для решений в областях 2 и 3, задаваемые соответственно неравенствами

$$e > \sqrt{-\frac{2\epsilon_0}{a}} \quad \text{и} \quad e > \sqrt{-\frac{2\epsilon_0}{3a}}. \quad (11)$$

Решения системы (3) описывают, по существу, поля в плоском волноводе с идеально проводящими стенками. Если последние поместить в плоскостях, параллельных плоскости yz , в точках, где $e_x = 0$, то в зависимости от числа узлов e_z между этими пластинами формулы (5) будут определять компоненты волн типа E_{on} по обычной волноводной терминологии (плоский волновод с нелинейным заполнением для ТЕ волн рассмотрен в [4]).

В случае $C_1 \neq 0$ каналирование поля в виде исчезающих на бесконечности решений системы (3) уже невозможно. Области существования интеграла (6), естественно, меняются по сравнению со случаем $C_1 = 0$, но их характер сохраняется. Так, на рис. 3 изображены области существования

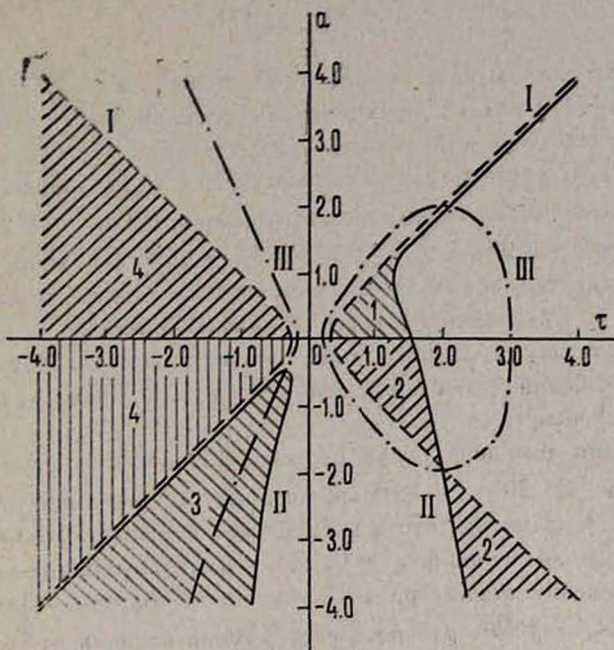


Рис. 3. Области существования интеграла (6) при $C_1 = 0,1$: кривые I — $\alpha = \pm \sqrt{\tau^2 - C_1}$; кривые II — $\alpha = -(\tau^2 - 2\tau) \pm \sqrt{\tau^2(\tau - 1)^2 - C_1}$; кривые III — $\alpha = \pm \sqrt{\tau^2(3 - \tau) - C_1}$.

ния интеграла (6) в плоскости (τ, α) при $C_1 = 0,1$. Периодические решения системы (3) существуют в областях 1 и 2 при $\tau > 0$. В остальных областях либо поле или его производные разрывны (например, в области 3 эти разрывы реализуются на кривой $\alpha = \pm \sqrt{\tau^2(3 - \tau) - C_1}$), либо есть точки бесконечно больших значений поля (область 4). При $C_1 \neq 0$ периодические решения существуют в области, где $\epsilon_0 > 0$, а также при отрицательной нелинейности среды ($\alpha < 0$) при $C_1 < 0$. Поперечное распределение поля в этом случае имеет почти синусоидальный характер.

В областях 4 и 7 на рис. 1 при $C_1 = 0$, как уже отмечалось, терпят разрыв либо производные полей, либо сами поля, и на первый взгляд кажется, что в этих областях невозможно построить непрерывные и гладкие решения уравнений Максвелла. Однако, как это отмечено в [2], в нелинейной среде возможно существование разрывных решений, обусловленных скачком диэлектрической проницаемости. Для построения соответствующих решений необходимо провести сшивку полей на плоскости разрыва ϵ , причем с одной стороны разрыва используются решения из областей 4 и 7 на рис. 1, примыкающих к биссектрисе соответствующих координатных углов, а с другой — решения уравнений Максвелла при $C_1 \neq 0$.

Условия сшивки, очевидно, имеют вид

$$\tau_1 e_{x1} = \tau_2 e_{x2}, \quad e_{z1} = e_{z2}, \quad \tau_1^3 - 3\tau_1^2 + \alpha^2 = 0, \quad (12)$$

где τ_1, e_{x1}, e_{z1} — параметры задачи при $C_1=0$, а τ_2, e_{x2}, e_{z2} — при $C_1 \neq 0$.

Система (12) имеет решение

$$\tau_2 = -\frac{\tau_1}{2}, \quad C_1 = -\frac{27}{4}\tau_1^2, \quad (13)$$

выражающее постоянную интегрирования C_1 через τ_1 и τ_2 . Последние уравнения из (12) и (13) задают функциональную связь между a и C_1 , что, в свою очередь, «деформирует» область существования интеграла (6) в переменных (a, τ) . С учетом этой зависимости для $a > 0$ можно выделить три характерные области изменения параметра a : $-\sqrt{20} < a < 0$, $-45\sqrt{3}/8 < a < -\sqrt{20}$, $a < -45\sqrt{3}/8$. В каждой из этих областей реализуется мода со своими специфическими особенностями.

Как видно из уравнений (12) и (13), диэлектрическая проницаемость на скачке меняет знак, а следовательно, меняет знак и e_x . Исходя из этого, построение решений будем проводить для $e_{x1} < 0$. Знак e_{z1} определяется из второго уравнения системы (3).

Распределения компонент поля первой солитонной моды в зависимости от $k_0 x$ при $-\sqrt{20} < a < 0$ аналогичны распределениям, приведенным в работе [2]. Заметим, что в этом случае в центре канала e_x принимает максимальное значение, а $e_z = 0$. Такое распределение поля характерно для всех значений параметра a из указанной области. Для области $-45\sqrt{3}/8 < a < -\sqrt{20}$ распределение компонент поля отлично от предыдущей области, а именно, у e_x появляются минимумы вблизи от точки скачка. При $a = -45\sqrt{3}/8$ распределения компонент поля приведены на рис. 4. Как видим, в центре канала e_x -компонента поля равна нулю, а у

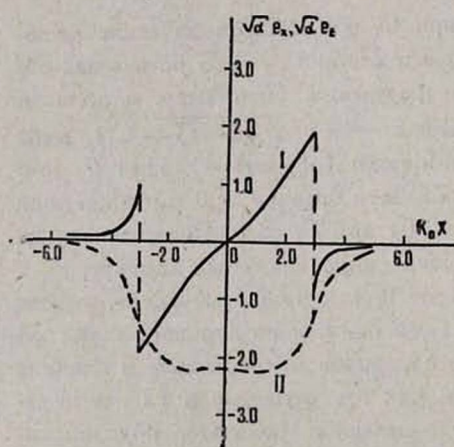


Рис. 4. Графики $\sqrt{a}e_x, \sqrt{a}e_z$ первой солитонной моды при $a = -45\sqrt{3}/8$. Кривая I — $\sqrt{a}e_x$; кривая II — $\sqrt{a}e_z$.

$|e_z|$ появляется минимум. Для $a < -45\sqrt{3}/8$ характер компонент поля аналогичен рис. 4 с той лишь разницей, что $|e_z|$ в центре канала принимает максимальное значение. Отметим также, что для всех $a < 0$ могут быть построены солитонные моды высших порядков (см. [2]).

Аналогичным образом могут быть построены разрывные решения для случая $a > 0$ ($a < 0$). Как следует из рис. 1, в этом случае a может

меняться в пределах $0 < a < 1$. Распределение компонент поля аналогично распределениям при $-\sqrt{20} < a < 0$. Отметим, что при $a > 0$ построение высших мод невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвак А. Г. Изв. вузов, Радиофизика, 9, 675 (1966).
2. Гильденбург В. Б. и др. ЖЭТФ, 84, 48 (1983).
3. Miyagi M., Nishida S. Radio Science, 10, 833 (1975).
4. Nozaka M., Nishida S. SCI. REP. RITU, B 23, 31 (1971).

ՏՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՈՉ ԳԵԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ

Խ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ

Ստացված են Մարսիլի հավասարումների ճշգրիտ լուծումները այնպիսի միջավայրի համար, որի դիէլեկտրիկ թափանցելիությունը հարմոնիկ ալիքի համար կախված է էլեկտրական դաշտի լարվածությունից քառակուսային օրենքով: Հետազոտված են լուծումների գոյությունը և ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն մեկուսացված ալիքներ ինչպես անընդհատ, այնպես էլ խզվող դաշտերով, ինչպես նաև լուծումներ ըստ ալիքի հաստատուն ֆազայի մակերևույթի տարածական պարբերական կախվածությամբ անհամասեռ հարթ ալիքների տեսքով:

PROPAGATION OF TM WAVES IN NONLINEAR MEDIA

Kh. S. HARUTYUNYAN, K. A. BARSUKOV

Exact solutions of Maxwell equations are obtained using the model of a medium, having the permittivity characterized by square-law dependence on the modulus of an electric field. The solution was assumed to be a harmonic travelling wave having a longitudinal component of the electric field. The domains of solution existence were investigated and it was shown that there exist solutions in the form of solitary waves both with continuous and discontinuous fields, as well as the solutions in the form of nonuniform plane waves with spatially periodical dependence over the constant phase surface.