Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 20, вып. 2, 91—95 (1985)

УДК 535.375.5

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОРИЕНТАЦИОННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ПРИ ЕГО ТЕЧЕНИИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Р. С. АКОПЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 3 марта 1983 г.)

Рассмотрена задача об ориентационной оптической нелинейности нематического жидкого кристалла (НЖК) вблизи порога однородной неустойчивости его течения по наклонной плоскости. Показано, что возмущение директора НЖК критически возрастает вблизи порога указанного типа неустойчивости.

1. Введение

Недавно теоретически предсказанная и экспериментально обнаруженная ориентационная оптическая нелинейность мезофазы жидких кристаллов (ЖК) является в настоящее время предметом интенсивных исследований (см., например, [1—3]). В частности, в некоторых работах (см. [4, 5] и цитируемую там литературу) обсуждается оптическая нелинейность нематического жидкого кристалла (НЖК) вблизи фазового перехода Фредерикса, индуцированного магнитным или электрическим полями, а также вблизи фазовых переходов между жидкокристаллическими модификациями.

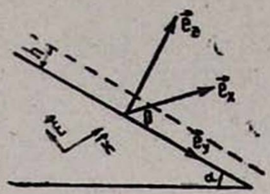
В работе [6] теоретически рассматривалась задача о течении НЖК по наклонной плоскости. Было показано, что для определенной геометрии при некотором пороговом значении потока возникает специфическая ориентационная неустойчивость. В настоящей работе теоретически исследована ориентационная оптическая нелинейность НЖК вблизи порога указанного типа неустойчивости и показано ее критическое увеличение при приближении к порогу.

2. Граничные условия и система линеаризованных гидродинамических уравнений

Пусть в направлении $\mathbf{e}_y$ неподвижной плоскости (x, y), наклоненной под углом α к горизонту (см. рисунок), непрерывно подается ЖК. Тогда при не очень больших значениях потока формируется стационарный поток жидкости толщиной h. Допустим, что граничные условия на подстилающей плоскости $z = 0$ соответствуют жесткому закреплению молекул в направлении $\mathbf{e}_x$ ($\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_x$ и $\mathbf{v} = 0$). Граничные условия на свободной поверхности $z = h$ имеют вид [7]

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{z=h}=0, \left(K_1\frac{\partial n_z}{\partial z}+\sigma_a n_z\right)_{z=h}=0, \left(\frac{\partial n_y}{\partial z}\right)_{z=h}=0, \tag{1}$$

где K_i — константы Франка, σ_a — анизотропия поверхностного натяжения (мы рассматриваем случай, когда $\sigma_a \geqslant 0$).



Жидкий кристалл толщиной h, молекулы которого ориентированы вдоль $\mathbf{e}_x$, течет вдоль оси $\mathbf{e}_y$ по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Волновой вектор и вектор поляризации падающей световой волны лежат в плоскости xz.

При очень слабых потоках для стационарного профиля скорости имеем [6]

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{e}_y v_{0y},\ v_{0y}=\frac{\rho g}{2\eta_a} z(2h-z)\sin\alpha, \tag{2}$$

где g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность ЖК, η_a — коэффициент вязкости для описанной геометрии.

Пусть на описанную систему падает электромагнитная волна, волновой вектор и вектор поляризации которой лежат в плоскости (x, z) так, что $\mathbf{E}=(E_x, O, E_z)$. При достаточно сильных потоках стационарные профили скорости (2) и директора $\mathbf{n}_0$ возмущаются даже в отсутствии электромагнитной волны. Обозначим возмущение директора $\mathbf{n}-\mathbf{n}_0 = \delta\mathbf{n} \equiv (0,\ n_y,\ n_z)$, возмущение скорости $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0=\delta\mathbf{v}\equiv(v_x,\ v_y,\ v_z)$ и возмущение давления через p. Линеаризованные стационарные уравнения, связывающие эти возмущения, для задачи, однородной в плоскости $(\mathbf{n}_0,\ \mathbf{v}_0)$, имеют вид

$$-K_2\partial^2_{zz} n_y+\alpha_2\partial_x v_y+\alpha_2 s n_z=0, \tag{4а}$$

$$-K_1\partial^2_{zz} n_z+\alpha_3\partial_z v_x+\alpha_3 s n_y=\frac{\varepsilon_a}{16\pi}(E_x E_z^*+E_x^* E_z), \tag{4б}$$

$$(\eta_b-\eta_a)s\partial_z n_y+\eta_b\partial^2_{zz} v_x+(\eta_b-\eta_a)n_y\partial_z s=0, \tag{4в}$$

$$-\eta_a\partial^2_{zz} v_y-\rho s v_z=0, \tag{4г}$$

$$-\partial_z p+\eta_a\partial^2_{zz} v_z=0, \tag{4д}$$

$$\partial_z v_z=0. \tag{4е}$$

Здесь $\varepsilon_a=\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp$ — анизотропия диэлектрической проницаемости мезофазы НЖК на световой частоте, $\partial_z\equiv d/dz$, η_a и η_b — коэффициенты вязкости Месовича,

$$\eta_a=0{,}5\cdot\alpha_4,\ \eta_b=0{,}5\cdot(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6),$$

α_i — коэффициенты Лесли, s — градиент скорости невозмущенного потока вдоль z,

$$s(z)=\frac{dv_{0y}}{dz}=\frac{\rho g}{\eta_a}(h-z)\sin\alpha. \tag{5}$$

При получении уравнения (4б) мы в правой части соответствующего уравнения работы [6] добавили момент силы, действующей на директор со стороны электромагнитной волны:

$$\Gamma_i = e_{ijk} n_j \left[\frac{\partial}{\partial x_e} \frac{\partial F_{\text{эл}}}{\partial (\partial n_k / \partial x_e)} - \frac{\partial F_{\text{эл}}}{\partial n_k} \right], \tag{6}$$

где e_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, $F_{\text{эл}}$ — свободная энергия взаимодействия электромагнитной волны с НЖК,

$$F_{\text{эл}} = -\frac{\varepsilon_a}{16\pi} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}^*). \tag{7}$$

Из уравнений (4г), (4д), (4е) и из граничных условий для $\mathbf{v}(z)$ получаем $v_z = v_y = p = 0$, что соответствует возмущению для $\mathbf{v}$ вида $= \mathbf{e}_x v_x(z)$. Из уравнения (4в) и из граничных условий находим v_x и подставляем в формулу (4б) работы [6]. Делая преобразования вида

$$Z = \frac{h-z}{z}, \quad n_y = \left(\frac{K_1 \alpha_2 \eta_b}{K_2 \alpha_3 \eta_a} \right)^{1/2} \tilde{n}_y,$$

$$n_z = \tilde{n}_z, \quad a = \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3 \eta_a}{K_1 K_2 \eta_b} \right)^{1/2} \frac{\rho g}{\eta_a} h^3 \sin\alpha, \tag{8}$$

$$I = \frac{\varepsilon_a h^2}{16 K_1} (E_x E_z^* + E_x^* E_z),$$

получаем систему уравнений для определения возмущения директора:

$$-\frac{d^2 \tilde{n}_y}{dZ^2} + aZ\tilde{n}_z = 0,$$

$$-\frac{d^2 \tilde{n}_z}{dZ^2} + aZ\tilde{n}_y = \pi^{-1} I. \tag{9}$$

Переходя к новым переменным $U = a^{2/3}(\tilde{n}_y + \tilde{n}_z)$, $W = a^{2/3}(\tilde{n}_y - \tilde{n}_z)$ и $X = a^{1/3} Z$, из системы (9) получаем два несвязанных уравнени

$$\frac{d^2 U}{dX^2} - XU = -\pi^{-1} I, \tag{10}$$

$$\frac{d^2 W}{dX^2} + XW = \pi^{-1} I. \tag{11}$$

В новых переменных граничные условия (1) принимают вид

$$\left[\frac{dU}{dX} - \frac{dW}{dX} - \Sigma_a X_1^{-1} (U - W) \right]_{X=0} = 0,$$

$$\left(\frac{dU}{dX} + \frac{dW}{dX} \right)_{X=0} = 0, \quad U|_{X=X_1} = W|_{X=X_1} = 0, \tag{12}$$

где введены обозначения: $X_1 = a^{1/3}$, $\Sigma_a = \sigma_a h / K_3$.

3. Ориентационная оптическая нелинейность вблизи порога неустойчивости течения

Разделив обе части уравнений (10) и (11) на l, получим уравнения, решения которых даются функциями Эйри $\mathrm{Ai}(X)$, $\mathrm{Bi}(X)$ и $\mathrm{Gi}(X)$:

$$
\begin{aligned}
U &= l\,[A_1 \mathrm{Ai}(X) + B_1 \mathrm{Bi}(X) + \mathrm{Gi}(X)], \\
W &= l\,[A_2 \mathrm{Ai}(-X) + B_2 \mathrm{Bi}(-X) - \mathrm{Gi}(-X)],
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где A_1, A_2, B_1 и B_2 — произвольные постоянные, которые нужно определить из граничных условий (12). Вблизи порога неустойчивости течения по наклонной плоскости они имеют вид

$$
A_n = \frac{G_n(X_1^{kp})}{P'(X_1^{kp})}(X_1 - X_1^{kp})^{-1}, \quad B_n = \frac{H_n(X_1^{kp})}{P'(X_1^{kp})}(X_1 - X_1^{kp})^{-1}, \tag{14}
$$

где $n = 1, 2$, X_1^{kp} — критическое значение параметра X_1, при котором течение становится неустойчивым в отсутствии светового поля,

$$
G_{1,2}(X_1) = \mp (F_{2,1} + D_1)(\Phi_{1,2} - D_1^2) + \Sigma_a X_1^{-1} D_2 (\Phi_1 + \Phi_2 - 2D_1^2),
$$

$$
H_{1,2}(X_1) = \mp D_1 (F_{2,1} + D_1)(\Phi_{1,2} + D_1 F_{1,2}) - \Sigma_a X_1^{-1} D_2 (F_1\Phi_2 + F_2\Phi_1 -
$$

$$
-2D_1^2 F_{1,2}), \; P(X_1) = (F_1 + D_1)(F_2 + D_1) + D_2 \Sigma_a X_1^{-1} (F_2 - F_1),
$$

$$
P'(X_1) = dP(X_1)/dX_1,
$$

$$
F_{1,2}(X_1) = \mathrm{Ai}(\pm X_1)/\mathrm{Bi}(\pm X_1), \qquad \Phi_{1,2}(X_1) = \mathrm{Gi}(\pm X_1)/\mathrm{Bi}(\pm X_1),
$$

$$
D_1 = -\frac{\mathrm{Ai}'(0)}{\mathrm{Bi}'(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \; D_2 = \frac{\mathrm{Ai}(0)\,\mathrm{Bi}'(0) - \mathrm{Ai}'(0)\,\mathrm{Bi}(0)}{2\,[\mathrm{Bi}'(0)]^2} \simeq 0{,}792.
$$

Для обсуждения влияния поверхностных сил на поведение коэффициентов A_n и B_n рассмотрим случаи $\sigma_a = 0$ и $\sigma_a \to \infty$. При $\sigma_a = 0$, воспользовавшись формулой

$$
X_1^{kp} = \left(\frac{Q_{kp}}{l}\right)^{1/3} \left(\frac{9\,\alpha_2\alpha_3\eta_a}{K_1K_2\eta_b}\right)^{1/6},
$$

получаем

$$
A_1 \simeq 0{,}47, \; B_1 \simeq -0{,}06, \; B_2 \simeq 0{,}38 \cdot A_2,
$$

$$
A_2 \simeq 2{,}1 \cdot \left(\frac{K_1K_2\eta_b}{\alpha_2\alpha_3\eta_a}\right)^{1/2} \left(\frac{Q_0^{kp}}{l} - \frac{Q}{l}\right)^{-1}.
$$

При $\sigma_a \neq 0$ критический индекс для всех четырех коэффициентов равен — 1. Например, при $\sigma_a \to \infty$ имеем

$$
A_2 = A_1 \simeq 4{,}41 \cdot \left(\frac{K_1K_2\eta_b}{\alpha_2\alpha_3\eta_a}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{Q_\infty^{kp}}{l} - \frac{Q}{l}\right)^{-1},
$$

$$
B_1 = B_2 \simeq -0{,}004 \cdot A_1.
$$

Малые возмущения директора $\delta\mathbf{n} = (0, n_y, n_z)$ приводят к возмущениям тензора диэлектрической проницаемости на световой частоте:

$$
\delta\varepsilon_{ik} = \varepsilon_a (n_i^0 n_k + n_i n_k^0).
$$

Как и следовало ожидать, ненулевыми являются только компоненты $\delta\varepsilon_{xy}=\delta\varepsilon_{yx}$ и $\delta\varepsilon_{xz}=\delta\varepsilon_{zx}$. Они являются функциями координаты через комбинации от функций Эйри.

Автор выражает благодарность Б. Я. Зельдовичу, Н. В. Табиряну и Ю. С. Чилингаряну за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Б. Я., Табирян Н. В.* Письма в ЖЭТФ, 30, 510 (1979).
2. *Зельдович Б. Я.* и др. Письма в ЖЭТФ, 31, 287 (1980).
3. *Зельдович Б. Я., Табирян Н. В.* ЖЭТФ, 82, 1126 (1982).
4. *Herman R. M., Serinko R. J.* Phys. Rev., A19, 1757 (1979).
5. *Акопян Р. С., Зельдович Б. Я., Табирян Н. В.* Кристаллография, 28, 973 (1983).
6. *Акопян Р. С., Зельдович Б. Я.* Кристаллография, 29, 137 (1984).
7. *Зельдович Б. Я., Табирян Н. В.* ЖЭТФ, 79, 2380 (1980).

ՆԵՄԱՏԻԿ ՀԵՂՈՒԿ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ՈՉԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՎԱՐՔԸ ԹԵՔ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՄԲ ՆՐԱ ՀՈՍՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ռ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Դիտարկված է նեմատիկ հեղուկ բյուրեղի (ՆՀԲ) կողմնորոշական օպտիկական ոչգծայնության վերաբերյալ խնդիր թեք հարթությամբ նրա հոսքի համասեռ անհավասարակշռության շեմին մոտ։ Ցույց է տրված, որ նշված անհավասարակշռության շեմին մոտ ՆՀԲ-ի դիրեկտորի խոտորումը խիստ աճում է։

CRITICAL BEHAVIOUR OF ORIENTATIONAL OPTICAL NONLINEARITY OF A NEMATIC LIQUID CRYSTAL AT ITS FLOW ON AN INCLINED PLANE

R. S. AKOPYAN

The problem of orientational optical nonlinearity of a nematic liquid crystal (NLC) near the threshold of uniform instability of its flow on an inclined plane is considered. It is shown that disturbances of the NLC director critically increase near the threshold of the above type instability.