

УДК 66.067.52:637.232.152

ВОЛНЫ РЯБИ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ
В РОТОРЕ ЦЕНТРИФУГИ

Д. С. ТОРОСЯН

Ленинаканский государственный педагогический институт
им. М. Налбандяна

(Поступила в редакцию 3 марта 1983 г.)

Рассмотрены волны ряби (капиллярные волны) на свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги. Предложено дисперсионное соотношение, связывающее конструктивные особенности ротора с физическими параметрами жидкости.

Свободная поверхность жидкости в роторе центрифуги является искривленной и в связи с явлением поверхностного натяжения находится в напряженном состоянии. В состоянии относительного равновесия, т. е. когда отсутствует течение жидкости внутри ротора центрифуги, свободная поверхность должна иметь наименьшую возможную величину. Это связано с тем, что молекулы жидкости, образующие поверхностный слой, обладают дополнительной потенциальной энергией по отношению к молекулам внутри жидкости. Поэтому молекулы жидкости поверхностного слоя, притягиваясь внутрь, стремятся уменьшить свободную поверхность, и в результате создается молекулярное (лапласовское) давление на поверхностный слой жидкости. Таким образом, свободная поверхность жидкости внутри ротора в поле центробежных сил инерции ведет себя как равномерно натянутая мембрана.

Исследования показывают, что на свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги возникает волновое движение, вследствие чего свободная поверхность жидкости внутри ротора увеличивается по сравнению с невозмущенным состоянием. Из-за значительной кривизны на гребнях волн возникают поверхностные (капиллярные) силы, под действием которых образуются волны ряби (капиллярные волны). Таким образом, наряду с центробежными волнами на свободной поверхности жидкости внутри ротора центрифуги возникают также волны ряби, которые играют важную роль в процессе центрифугирования.

Рассмотрим частично заполненный жидкостью цилиндрический ротор, который с относительно большой угловой скоростью ω вращается вокруг вертикальной оси. Тогда с достаточной практической точностью можно пренебречь действием сил гравитационного поля [1, 2]. В этом случае под действием центробежных сил инерции частицы жидкости внутри ротора разместятся цилиндрическим слоем определенной толщины, ось которого совпадает с осью вращения ротора центрифуги. При постоянной угловой скорости вращения жидкость через определенное время будет нахо-

даться в относительном покое. Если после этого в момент времени $t = 0$ ко всей массе находящейся внутри ротора жидкости приложить некоторое импульсивное давление, что всегда имеет место в центрифуге, то жидкость придет в движение и по свободной поверхности ее будут распространяться волны.

В этом случае рассматриваемое движение будет потенциальным. Скорость движения жидкости v будет выражаться через градиент потенциала скорости Φ и уравнение неразрывности обратится в уравнение Лапласа [3—6].

Представим функцию $\Phi(r, \theta, t)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа, в виде

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi(r, \theta) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где $\Phi(r, \theta)$ — функция, описывающая зависимость амплитуды от полярных координат (радиуса r и угла θ), σ — круговая частота, t — время, ε — начальная фаза.

Тогда уравнение Лапласа в полярных координатах примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2)$$

Решение (2) будем искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной из координат:

$$\Phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta). \quad (3)$$

Тогда (2) можно представить так

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}. \quad (4)$$

Это соотношение может иметь место только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную через n^2 . Тогда (4) распадется на два уравнения, решения которых представим следующим образом:

$$R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}, \quad (5)$$

$$\Theta(\theta) = a \cos(n\theta + \delta), \quad (6)$$

где c_1 , c_2 , a и δ — произвольные постоянные.

Полное решение, согласно (3), есть

$$\Phi(r, \theta) = (c_1 r^n + c_2 r^{-n}) \cos(n\theta + \delta). \quad (7)$$

При исследовании центробежных волн в роторе центрифуги считается, что давление жидкости на свободной поверхности равно атмосферному давлению. Однако здесь кроме центробежной силы инерции необходимо учитывать также силу поверхностного натяжения. Это связано с тем, что при возникновении центробежных бегущих волн увеличивается величина свободной поверхности и последняя значительно искривляется. Так как молекулы жидкости расположены близко друг к другу, то возникающие силы притяжения между ними будут иметь значительную величину. Они и обуславливают появление поверхностного натяжения, действующего в пло-

скости свободной поверхности жидкости внутри ротора центрифуги. Поэтому здесь предполагается, что давление жидкости на поверхности раздела испытывает разрыв [3—6].

Величину лапласовского капиллярного давления определим из выражения $P_L = T dF/dV$, где T — сила поверхностного натяжения, dF и dV — элементы поверхности и объема цилиндрического слоя толщиной dr . Кривизну рассматриваемой поверхности жидкости внутри ротора центрифуги определим из зависимости

$$\frac{1}{r} = \frac{R_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2}}{\left(1 - \left(\frac{R_0^2}{R_0^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2\right)^{3/2}}. \quad (8)$$

При небольших возмущениях $\left(\frac{\partial \xi}{R_0 \partial \theta} \ll 1\right)$ квадратом производной можно пренебречь, и тогда лапласовское давление в линейной постановке задачи определится из выражения

$$P_L = T \frac{\partial^2 \xi}{R_0^2 \partial \theta^2}, \quad (9)$$

где ξ и R_0 — радиальное смещение и радиус невозмущенной свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги.

Для формулировки граничного условия на свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги воспользуемся уравнением Эйлера для поля центробежных сил инерции [1], которое приводится к интегралу Коши—Лагранжа [3—6]. Пренебрегая квадратом скорости в уравнении гидромеханики для безвихревого движения несжимаемой однородной жидкости в роторе центрифуги, граничное условие запишем в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{R_0^2 \partial \theta^2} = 0, \quad (10)$$

где ρ — плотность жидкости.

Уравнение свободной поверхности жидкости внутри ротора центрифуги определим функцией

$$r = \xi(r, \theta, t). \quad (11)$$

При волновом движении частицы жидкости, принадлежащие свободной поверхности, не могут перейти внутрь жидкости и в течение всего волнового процесса остаются на свободной поверхности, поэтому можно принять [3—6]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (12)$$

Дифференцируя (10) по времени t , учитывая (11) и (12) и имея в виду, что приближенно можно принять

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) = \omega^2 \xi(r, \theta, 0) \frac{\partial \xi}{\partial t} \approx \omega^2 R_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (13)$$

будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \omega^2 R_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{T}{\rho \partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{R_0^2 \partial \theta^2} = 0, \quad (14)$$

где $R_0 = \xi(r, \theta, 0)$.

Определив значения частных производных, входящих в (14), и решив полученное уравнение относительно σ , найдем

$$\sigma^2 = \omega^2 R_0^2 n \frac{c_2 R_0^{-n-1} - c_1 R_0^{n-1}}{c_1 R_0^n + c_2 R_0^{-n}} + \frac{T n^3 (c_2 R_0^{-n-1} - c_1 R_0^{n-1})}{\rho R_0^2 (c_1 R_0^n + c_2 R_0^{-n})}. \quad (15)$$

Установим связь между произвольными постоянными c_1 и c_2 . Для этого воспользуемся вторым граничным условием, заключающемся в требовании обтекания жидкостью внутренней поверхности ротора центрифуги:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (16)$$

где R — внутренний радиус ротора центрифуги.

Используя (16), найдем, что $c_1 = c_2 R^{-2n}$. Подставляя полученную связь в (15), определяем дисперсионное соотношение в виде

$$\sigma^2 = \left(\omega^2 n + \frac{T n^3}{\rho R_0^3} \right) \frac{1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2n}}{1 + \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2n}}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что круговая частота σ зависит от угловой скорости вращения ротора центрифуги, радиусов R и R_0 ротора, величины поверхностного натяжения жидкости и ее плотности, а также от постоянного произвольного числа n .

При отсутствии поверхностных сил из (17) получается дисперсионное соотношение для поверхностных центробежных волн на свободной поверхности ротора центрифуги.

Уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости внутри ротора будет определяться уравнением

$$\xi = R_0 + a \sin(n\theta - \sigma t), \quad (18)$$

где a — амплитуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов В. И. Центрифугирование. Изд. Химия, М., 1976.
2. Шкоропад Д. Е. Центрифуги для химических производств. Изд. Машиностроение, М., 1975.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. Физматгиз, М., 1963.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. Изд. Наука, М., 1977.
5. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, М.—Л., 1947.
6. Лайтхилл Дж. Волны в жидкости. Изд. Мир, М., 1981.

ԱԼԵԾԱԼՔ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱԽՈՒՅՋ ՄԵՔԵՆԱՅԻ ՌՈՏՈՐՈՒՄ ԳՏԵՎՈՂ
ՀԵՂՈՒԿԻ ԱԶԱՏ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ

Ջ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Քննարկված են ալեծալք ալիքները (մազական ալիքներ) հեղուկի ազատ մակերևույթի վրա կենտրոնախույզ մեքենայի ռոտորում: Առաջարկված է կենտրոնախույզ մեքենայի իներցիոն ուժադաշտում ալեծալք ալիքների նկարագրման դիսպերսիոն հարաբերակցություն:

THE PRESENCE OF CAPILLARY WAVES ON THE FREE
SURFACE OF LIQUID IN A CENTRIFUGE ROTOR

J. S. TOROSYAN

The presence of capillary waves on the free surface of liquid in a centrifuge rotor is discussed. A dispersion relation is proposed for the description of waves in the field of inertial forces of the centrifuge.