

УДК 523.854

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЕБАЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Л. А. АЛИХАНОВА, В. Л. ЭКЕЛЕКЯН, Р. С. ОГАНЕСЯН

Ереванский государственный медицинский институт

(Поступила в редакцию 21 февраля 1983 г.)

Дан подробный анализ движения электронов в сферической области Дебая бесстолкновительной плазмы как при малых, так и при больших скоростях. Показано, что финитное движение электронов возможно также при нулевом и положительном значениях полной энергии электронов. Для этих орбит приведены аналитические выражения через эллиптические интегралы. Рассмотрен вопрос существования и устойчивости круговой орбиты электрона с нулевой полной энергией и проведено сравнение с аналогичным случаем движения в одном только кулоновском поле притяжения. В рамках классической теории оценена длина волны, излучаемой электроном при движении по слегка возмущенной круговой орбите. Проведено сравнение теоретических результатов с данными астрофизических наблюдений.

1. Известно [1], что в плазме вокруг заряженных тел (зонды и т. п.) или отдельного точечного заряда самой плазмы нарушается электрическая нейтральность. В этой области в зависимости от отношения длины свободного пробега частиц плазмы к характерной длине разделения зарядов движение частиц существенно различается. Эти вопросы представляют интерес с точки зрения диагностики и спектроскопии плазмы.

Кинетическое уравнение Власова с самосогласованным полем допускает решение в виде функции распределения Максвелла-Больцмана для равновесной бесстолкновительной плазмы [2]. Это дает возможность вычислить потенциал вокруг заряженного тела или каждого заряда плазмы и оценить размеры области нарушения нейтральности в плазме. В частности, потенциал заряженной сферы, имеющей радиус R и заряд q , определяется формулой

$$V = q \exp\{-\alpha(r - R)\}/r. \quad (1)$$

Радиус нарушения нейтральности при этом будет $r_D = R + D$, где

$$D = \alpha^{-1} = \{4\pi n q_0^2 (ZT_e + T_i)/kT_e T_i\}^{-1/2}. \quad (2)$$

При $R \rightarrow 0$ получаем потенциал точечного заряда и радиус Дебая $r_D = D$ в плазме. Для межзвездного газа ($T_e \approx T_i = 10^4 \text{ K}$, $n = 1 \text{ см}^{-3}$) $D = 4,8 \text{ см}$, для ионосферы ($h = 400 \text{ км}$, $n = 10^8 \text{ см}^{-3}$, $T = 10^4 \text{ K}$) $D = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ и т. д. [3].

Для сферической области бесстолкновительной плазмы движение электронов в основном можно рассматривать как обращение вокруг силового центра с потенциалом (1). Записав потенциальную энергию такого

поля в виде $U = -\frac{z}{r} \exp\{-\alpha r\}$, для полной энергии частицы с массой m будем иметь выражение

$$E = mr^2/2 + U_{eff} = \text{const}, \quad (3)$$

где

$$U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{z}{r} \exp\{-\alpha r\}, \quad \alpha > 0, \quad M = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad (4)$$

M — момент импульса электрона, (r, φ) — полярные координаты частицы, $z = qq_0 \exp\{\alpha R\}$, q_0 — заряд электрона.

Как известно из классической теории движения частицы в центрально-симметричном поле [4], решение аналогичных задач сводится к вычислению интеграла

$$\varphi = (M/\sqrt{2m}) \int dr / \{r^2 \sqrt{E - U_{eff}}\}, \quad (5)$$

который в общем случае аналитически не берется. Для приближенного или численного вычисления целесообразно выразить (5) через безразмерные величины:

$$\varphi = \sqrt{a} \int_{x_2}^x dx / \{x \sqrt{2bx^2 + 2x \exp(1-x) - a}\}, \quad (6)$$

где

$$x = \alpha r = r/D, \quad a = M^2 \alpha e / (mz), \quad b = eE / (zx), \quad (7)$$

e — основание натурального логарифма.

Численный метод интегрирования (6) предполагает задать конкретные значения параметров a и b , т. е. момент импульса и энергию частицы. Исследуем поведение эффективной потенциальной энергии, представив U_{eff} с помощью безразмерных величин: $U_{eff} = E f(x)/b$, $f(x) = (a/2 - x \exp(1-x))/x^2$. Придавая конкретные значения параметру a , получаем семейство кривых, из которых потенциальную яму образуют те кривые, для которых $a < a_0 = 2,3$ (см. рис. 1).

При $a > a_0$ кривая эффективной потенциальной энергии полностью расположена в положительной области значений энергий, при $0 < a < 5/3$ кривые $f(x)$ имеют две точки перегиба, при $a = 5/3$ — одну.

Как свидетельствуют кривые $f(x)$ (рис. 1), дебаевская потенциальная яма по сравнению с чисто кулоновской имеет специфические особенности. Так, например, финитное движение в дебаевском поле оказывается возможным для всех значений параметра b в интервале $f_{\min} \leq b \leq f_{\max}$, если только выполняется условие $a \leq a_0$. Другими словами, в отличие от движения электронов в чисто кулоновском поле притяжения с отри-

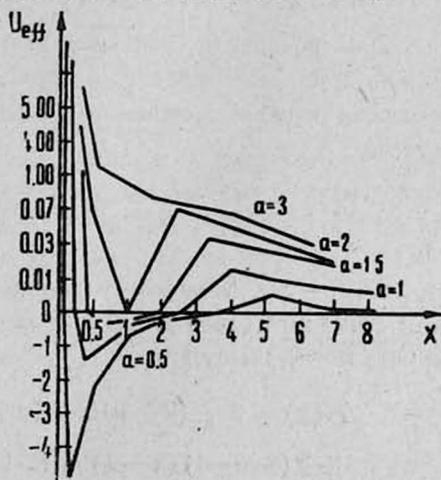


Рис. 1. Безразмерная эффективная потенциальная энергия электронов в дебаевском поле для значений параметра приведенного момента импульса $a = 0,5; 1; 1,5; 2; 3$.

цательной полной энергией в плазменной области Дебая движение электронов может быть финитным и для некоторого интервала неотрицательных значений энергии.

Вычисления на ЭВМ, сделанные для интеграла (6), показали существование условно-периодического движения электронов в указанной положительной области энергии и подтвердили правильность вышеприведенных качественных рассуждений. В таблице приведены данные для φ и x в случае $a = 1,631$, $b = \pm 0,035$. Заметим, что расчет одной траектории на ЭВМ ЕС 1033 занимает 0,53 мин.

Таблица

φ	x	φ	x	φ	x
0,018	0,512	0,061	0,481	9,560	0,501
1,650	0,812	1,857	0,781	11,718	0,761
2,390	1,112	2,501	1,081	12,381	1,061
3,097	1,412	2,978	1,381	12,865	1,361
4,422	1,352	3,412	1,681	13,300	1,661
5,102	1,052	3,883	1,981	13,765	1,961
5,896	0,752	4,734	2,281	14,518	2,261
7,953	0,572	6,121	2,001	16,001	2,021
9,139	0,872	6,599	1,701	16,486	1,721
9,843	1,172	7,032	1,401	16,920	1,421
10,615	1,472	7,504	1,101	17,386	1,121
11,887	1,292	8,129	0,801	17,994	0,821
12,560	0,992				

$$x_1 = 0,480, x_2 = 2,291, a = 1,631, b = + 0,035$$

$$x_1 = 0,511, a = 1,631$$

$$x_2 = 1,532, b = - 0,035$$

Зависимость $x = x(\varphi)$, полученная на ЭВМ по формуле (6) для безразмерного момента импульса $a = 1,631$ и для значений $b = -0,035$ (два витка орбиты) и $b = +0,035$ (2,86 витка) приведенной полной энергии электрона; x_1 и x_2 — корни уравнения $U_{eff} = E$ (пределы финитного движения).

2. Особенности движения электрона в сферической области Дебая можно проиллюстрировать в случае $r \approx D$, когда удастся получить аналитическое решение уравнения (3). Действительно, в этом случае из (5) получаем

$$\varphi = \sqrt{a} \int dx / [x^2 \sqrt{P(x)}], \quad (8)$$

где $P(x)$ — многочлен n -го порядка (n — наивысший порядок в разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора около точки $x = 1$). Многочлен $P(x)$ в случае $n = 8$ имеет вид

$$P(x) = b + (2-a)/2 + (a-2)(x-1) + (5-3a)(x-1)^2/2 +$$

$$+ 2(3a-4)(x-1)^3/3 + 5(13-12a)(x-1)^4/24 + (180a -$$

$$- 163)(x-1)^5/60 + (1957-2520a)(x-1)^6/720 +$$

$$+ (1008a-685)(x-1)^7/252 + (109601-181440a)(x-1)^8/40320.$$

Как известно, интеграл (8) сводится к эллиптическим интегралам. Так, например, в случае $n = 4$ интеграл (8) можно представить в виде

$$\varphi = \sqrt{\frac{24a}{5(13-12a)}} \int_{x_4}^x dx / \{x^2 \sqrt{G(x)}\} = \sqrt{\frac{24a}{5(13-12a)}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_2} + \frac{x_2(x_2-x_1-x_3-x_4)}{x_1x_3x_4} \right] \int dx / \{(x-x_2) \sqrt{G(x)}\} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) \int dx / \{x \sqrt{G}\} - \frac{1}{2} \frac{3x_2-x_1-x_3-x_4}{x_1x_3x_4} \int \frac{dx}{\sqrt{G}} - \frac{2}{x_1x_3x_4} \int \frac{xdx}{\sqrt{G}} + \frac{x_2 \sqrt{G}}{x(x-x_2)} \right\}$$

$$G(x) = (x_1-x)(x_2-x)(x_3-x)(x-x_4), \quad x_1 > x_2 > x_3 \geq x > x_4, \quad (9)$$

$$\int_{x_1}^x dx / \sqrt{G(x)} = (2/s) F(\beta, \nu), \quad s = \sqrt{(x_1-x_3)(x_2-x_4)},$$

$$\int dx / \{x \sqrt{G}\} = \left[(x_1-x_4) \Pi \left(\beta, \frac{x_1(x_4-x_2)}{x_4(x_1-x_3)}, \nu \right) + x_4 F(\beta, \nu) \right] / (x_2x_4s),$$

$$\int dx / \{(x_2-x) \sqrt{G}\} = [(x_2-x_1)(x_2-x_4)s]^{-1} \left[(x_4-x_2) F(\beta, \nu) + (x_4-x_1) \Pi \left(\beta, \frac{(x_4-x_3)(x_2-x_1)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}, \nu \right) \right],$$

$$\int x dx / \sqrt{G} = \left[(x_4-x_1) \Pi \left(\beta, \frac{x_4-x_3}{x_1-x_3}, \nu \right) + x_1 F(\beta, \nu) \right],$$

$$\beta = \arcsin \sqrt{\frac{(x_1-x_3)(x-x_4)}{(x_3-x_4)(x_1-x)}}, \quad \nu = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}}{s}, \quad (10)$$

где x_1, \dots, x_4 — корни алгебраического уравнения

$$P(x) = b + 87/8 - 7,5a + (20a - 155/6)x + (107/4 - 22,5)x^2 + (12a - 13,5)x^3 + 5(13-12a)x^4/24 = 0,$$

F , E и Π — эллиптические интегралы Лежандра соответственно I, II и III родов [5]. Заметим, что в случае двух положительных действительных и двух комплексно-сопряженных корней уравнения $P(x) = 0$ необходимо пользоваться следующими выражениями эллиптических интегралов [5]:

$$\int_x^b dx / \sqrt{(x^2+a^2)(b^2-x^2)} = F(\delta, r)/h, \quad h = \sqrt{a^2+b^2}, \quad b > x \geq 0,$$

$$\int_x^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = hE(\delta, r) - \frac{a^2}{h} F(\delta, r), \quad x = b \cos \delta, \quad b = rh,$$

$$\int_x^b dx / \{(p-x^2) \sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}\} = \Pi \left(\delta, \frac{b^2}{b^2-p}, r \right) / [(p-b^2)h], \quad p \neq b^2,$$

$$\int_x^b dx / \{x^2 \sqrt{(x^2 + a^2)(b^2 - x^2)}\} = [a^2 F(\delta, r) - (a^2 +$$

$$+ b^2) E(\delta, r)] / \{a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2}\} + \sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 - x^2)} / \{a^2 b^2 x\}.$$

Рассмотрим частный случай интеграла (9), когда имеет место вырождение эллиптического интеграла. Пусть $a = 1,9$ и $b = 0$ (т. е. обращение электрона в дебаевском поле с полной нулевой энергией). Решение уравнения

$$P(x) = b + 11 - 6a + 2(4a - 7)x + (5 - 3a)x^2 = 0$$

определяет пределы финитного движения: $x_1 = (6 - \sqrt{8})/7$ и $x_2 = (6 + \sqrt{8})/7$, а уравнение движения (3) записывается в виде

$$\dot{\varphi} = \sqrt{19} \int_{x_1}^x dx / (x^2 \sqrt{12x - 7x^2 - 4}) \quad (12)$$

или

$$r = (pD) \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left(\gamma \varphi - \lambda(x) - \frac{\pi}{2} \right) \right\}^{-1}, \quad \lambda(x) = \frac{12x - 7x^2 - 4}{3x}, \quad (13)$$

где $p = 2/3$, $\varepsilon = \sqrt{2}/3$, $\gamma = 4\sqrt{19}/57$. Имея в виду малость изменения функции $\lambda(x)$ в области $x_1 \leq x \leq x_2$, заметим, что кривая (13) представляет собой прецессирующий эллипс с параметром p , эксцентриситетом ε и с циклической частотой прецессии γ . Этот результат становится более точным после первых нескольких поворотов угла φ . С учетом второго слагаемого в аргументе косинуса в (13) орбита электрона представляет собой незамкнутую ограниченную кривую, так как угол поворота для нее есть

$$\Delta\varphi = \int_{x_1}^{x_2} dx / [x^2 \sqrt{76^{-1}(12x - 7x^2 - 4)}] = 3\pi \sqrt{19}/2.$$

Ясно, что параметр прецессирующего эллипса (13) зависит от температуры посредством дебаевского радиуса, причем при высоких температурах соответствующие эллипсы-орбиты «набухают». Заметим также, что орбиты электронов в дебаевском поле в виде прецессирующих эллипсов получаются и в том случае, когда $r \ll D$, т. е. когда основным считается кулоновское поле, а дебаевский вклад в (1) принимается за малое возмущение [4].

4. Исследуем в дебаевском поле движение электрона по окружности, когда полная энергия равна нулю. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} M^2 = 2 m \kappa r \exp \{-ar\} \\ M^2 = m \kappa (1 + ar) \exp \{-ar\} \end{cases} \quad (14)$$

(см. также кривую $a = 2$ на рис. 1). Круговая орбита вращения электрона в дебаевском поле с полной нулевой энергией возможна, когда $a = 2$ и $r = D$ (т. е. $x = 1$). Определим частоту вращения электрона по этой круговой орбите:

$$\Omega = \dot{\varphi} = M/(mr^2) = \alpha (2\chi_1/me)^{1/2} \quad (15)$$

и допустим, что имеют место малые возмущения вдоль этой круговой орбиты: $r = D + \xi$; $|\xi| \ll D$. Тогда с учетом ангармонических членов вплоть до четвертого порядка малости уравнение движения для радиальной части радиуса-вектора частицы примет вид

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 4\alpha\omega^2 \xi^2 - 55\alpha^2\omega^2 \xi^3/6, \quad (16)$$

где $\omega^2 = \chi_1^3/me = \Omega^2/2$.

Применяя метод Крылова-Боголюбова [4] для решения подобного рода уравнений, получим

$$\xi = \xi_0 \cos [\omega (1 + 55 (\xi_0/4D)^2) t + \varphi_0]. \quad (17)$$

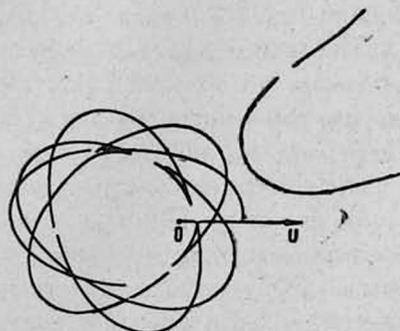
Имея в виду (15), для уравнения движения окончательно находим

$$r = D + \xi = D \left\{ 1 - (\xi_0/D) \cos \left[2^{-1/2} \left(1 + \frac{55}{16} \left(\frac{\xi_0}{D} \right)^2 \right) \varphi + \varphi_0 \right] \right\}^{-1}. \quad (18)$$

Траектория (18) — также прецессирующая эллиптическая орбита с параметром $p = D$, эксцентриситетом $e = \xi_0/D$ и с частотой прецессии $[1 + 55 (\xi_0/D)^2 / 16] / \sqrt{2}$. Известно, что при определенном отрицательном значении полной энергии в чисто кулоновском поле притяжения также существует круговая орбита $r = r_0$, которая при малых возмущениях превращается в стационарную эллиптическую траекторию с параметром $p = r_0$ и с эксцентриситетом $e = \xi_0/r_0$ (приведенное значение полной энергии возмущений — $e^2/2$).

Таким образом, возмущенная круговая орбита в дебаевском поле с полной нулевой энергией представляется в виде прецессирующего эллипса, т. е. обладает определенной устойчивостью. Заметим, что эксцентриситет такого эллипса кроме обычных параметров зависит также от температуры, причем с понижением температуры вышеуказанные орбиты все более вытягиваются, что может привести к тому, что электрон может уйти из области Дебая. Далее, если параметр эллипса (18) с увеличением температуры возрастает по величине, то частота прецессии и эксцентриситет эллипса в тех же условиях уменьшаются. Орбита (18) — ограниченная, незамкнутая кривая — изображена на рис. 2.

Рис. 2. Характерные финитные и неограниченные траектории электронов в дебаевском поле для классической и релятивистской частиц.



В сообщении Уайза и Келлегера [6] было указано на наличие красного смещения в серии Бальмера спектра Сириуса для H 18, H 20 и H 22.

Это смещение для Н 20 составляет $\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-2}$ нм. Используя данные Койла [6] для температуры и плотности в удаленных участках плазменной атмосферы Сириуса, оценим частоту вращения φ из (15) для возмущенной орбиты (18):

$$\varphi = M(1 \pm 2\xi_0/D)/(mD^2).$$

Итак, если круговая орбита электрона в дебаевском поле (с полной нулевой энергией) получает малое возмущение (энергия возмущения — порядка $\Delta b \approx 0,03$), то согласно классической теории поля такая частица будет излучать электромагнитную волну с $\lambda = 3,68 \cdot 10^2$ нм. Этот результат хорошо согласуется с обнаруженными данными красного смещения атмосферы Сириуса [6]. Квантовомеханическое рассмотрение излучения электронов в дебаевском поле намечается осуществить для неотрицательных значений полной энергии электронов.

5. Решение задачи движения электрона в дебаевском поле в релятивистском случае сводится к вычислению интеграла [7]

$$\varphi = Mc \int dr / \{ r^2 \sqrt{[E + \kappa \exp(-ar)/r]^2 - m_0^2 c^4 - M^2 c^2 / r^2} \},$$

который в безразмерных параметрах выглядит так

$$\varphi = A \int dx / \{ x^2 f(x) \}, \quad f^2(x) = B^2 - L^2 - A^2/x^2 + \left[\frac{\exp(1-x)}{x} \right]^2 + \frac{2B}{x} \exp(1-x), \quad (19)$$

где

$$A = Mce/x, \quad B = \frac{eE}{ax}, \quad L = \frac{em_0c^2}{ax}, \quad (20)$$

m_0 — масса покоя электрона.

Из требования вещественности подкоренного выражения получаем определенные условия, накладываемые на значения энергии (B) и момента импульса (A). Качественное исследование подкоренного выражения (19) показывает, что при $B^2 > L^2$ движение частицы может быть только инфинитным. Причем при $A < e$ получается инфинитное движение с возможным падением на центр (подкоренное выражение (19) положительно для всех значений x и нигде не обращается в нуль). При $A > e$ выражение $f(x)$ положительно для значений x , больших некоторого значения x' , определяемого из условия $f(x) = 0$, т. е. при $A > e$ частица совершает инфинитное движение в области $x' < x < \infty$.

Иная картина получается при условии $B^2 < L^2$ или $E < m_0c^2$, т. е. когда полная энергия частицы меньше энергии покоя. При этом возможны связанные состояния. При $A < e$ подкоренное выражение (19) оказывается положительным для значений $0 < x < x''$, где x'' определяется из условия равенства нулю подкоренного выражения, т. е. частица может совершать в этой области финитное движение с возможным «захватом» ее центром. Если $A > e$, то подкоренное выражение (19) положительно для области значений $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, где x_{\min} и x_{\max} — точки, в которых $f(x) = 0$. Это — точки поворота траектории финитного движения частицы.

Особенности движения электронов в сферической области Дебая при больших скоростях можно также проиллюстрировать при значениях $\alpha (r - R) \ll 1$. В этом случае интеграл (19) принимает вид

$$\varphi = \int Mc dr / \{ r^2 \sqrt{(E' + qq_0(1 + \alpha R)/r)^2 - m_0^2 c^4 - M^2 c^2 / r^2} \}. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) известно:

$$r = p_1 / \{ 1 + \varepsilon_1 \cos \gamma \varphi \},$$

где

$$p_1 = \gamma^2 c^2 M^2 / (q_0 q (1 + \alpha R) E'), \quad \gamma = \sqrt{1 - q_0^2 q^2 (1 + \alpha R)^2 / (c^2 M^2)}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{c^2 M^2}{q_0^2 q^2 (1 + \alpha R)^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{(E' - qq_0 \alpha)^2} \right)}.$$

Из формул (22) видно, что все характеризующие орбиту движения электрона параметры в общем случае зависят от температуры. В силовом поле точечного заряда ($R \rightarrow 0$) зависимость параметра γ от температуры исчезает.

Рассмотрим случай, когда $q^2 q_0^2 (1 + \alpha R)^2 / c^2 M^2 > 1$. В этом случае γ — мнимое число, и имеет место падение на центр, что происходит при температуре, меньшей некоторой критической: $T < T_c$,

$$\text{где} \quad T_c = 4 \pi n q_0^2 (Z + 1) R^2 k^{-1} (cM/q_0 e - 1)^{-2}.$$

При $q^2 (1 + \alpha R)^2 e^2 / c^2 M^2 < 1$, т. е. при $T > T_c$ финитное движение возможно, если $\varepsilon_1 < 1$. Пользуясь формулой (22), получаем условие финитности движения электрона при больших скоростях: $E - qq_0 \alpha < m_0 c^2$. Или имея в виду, что $E = m_0 c^2 + E_k + U$, получаем

$$E_k + U - qq_0 \alpha < 0. \quad (23)$$

Отсюда видно, что финитное движение электрона возможно не только при $E_k + U < 0$, но и при $E_k + U > 0$, лишь бы выполнялось условие (23). При $\varepsilon_1 < 1$ финитное движение имеет условно-периодический характер. Для такого движения смещение перигелия определяется формулой

$$\Delta \varphi = \frac{2 \pi (1 - \gamma)}{\gamma} = \frac{\pi q^2 q_0^2}{c^2 M^2} = \frac{\pi q_0^2 q^2}{c^2 M^2} \left\{ 1 + R \left[\frac{4 \pi n q_0^2 (Z + 1)}{kT} \right]^{1/2} \right\}^2.$$

С ростом температуры $\Delta \varphi$ уменьшается. При $R \rightarrow 0$ температурная зависимость параметра $\Delta \varphi$, как и γ , исчезает.

6. Изучим движение электронов с большими скоростями в дебаевском поле, когда $r \approx D$ ($x \approx 1$). Применяя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора около точки $x = 1$, придем к интегралу

$$\varphi = A \int dx / \{ x^2 \sqrt{P(x)} \}, \quad (24)$$

где

$$P(x) = (268 - 60 A^2 + 65 B) x^4 / 12 + (72 A^2 - 81 B - 314) x^3 / 3 + (189 - 45 A^2 + 107 B / 2) x^2 + 2(20 A^2 - 155 B / 6 - 236 / 3) x + B^2 - L^2 - 15 A^2 + 87 B / 4 + 155 / 3. \quad (25)$$

Рассмотрим случай, когда релятивистский электрон имеет финитную траекторию. Например, если $A^2=10$, $B=-11$, $L=9$, то $P(x) = 87,25(x-0,87)(1,94-x)((x-1,07)^2+0,87)$. Тогда интеграл (24) с помощью преобразования

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \frac{x_1-x}{x-x_2}, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{x_1-b_1}{c_1}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{x_2-b_1}{c_1},$$

где

$$b_1=1,07, \quad x_1=1,94, \quad x_2=0,87, \quad x_2 \leq x \leq x_1, \quad c_1=0,93,$$

сводится к сумме элементарных функций и трех сравнительно простых типов эллиптических интегралов F , E и Π (см., например, (11)).

Ограничившись в разложении функции $f(x)$ членами вплоть до второго порядка малости, при принятых значениях параметров A , B и L получим следующее уравнение движения электрона в дебаевском поле:

$$\varphi = \sqrt{10} \int_{x_0}^x dx / \{x^2 \sqrt{212x - 76x^2 - 127}\}$$

или

$$r = Dp / \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left[\gamma \varphi - \lambda(x) + \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad \lambda(x) = \frac{\sqrt{2413(x_2-x)(x-x_1)}}{53x}, \quad (26)$$

где эксцентриситет $\varepsilon = 6\sqrt{11}/53$, параметр $p = 127/106$, частота прецессии $\gamma = 127\sqrt{12,7}/106$, а пределы движения: $x_1 = 0,87$ и $x_2 = 1,92$. Функция $\lambda(x)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$ принимает свое максимальное значение, равное $0,82$, так что уже на первом витке орбиты это значение меньше, чем $\pi/2$. Итак, траектория (26) — также прецессирующий эллипс.

Для проведения сравнения с нерелятивистским случаем мы не вправе брать соответствующие значения параметров a и b , так как частица, в зависимости от начальных условий, является либо релятивистской, либо классической. Однако можно сравнить одинаковые по характеру случаи: а) $A^2 = 10$, $B = -11$, $L = 9$ и б) $b = -1/8$, $a = 9/5$, т. е. в обоих случаях берем отрицательное значение полной энергии электрона в дебаевском поле. В случае б) траектория электрона — прецессирующий эллипс (см. также (13))

$$r = Dp \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left(\gamma \varphi - \lambda(x) + \frac{\pi}{2} \right) \right\}^{-1}, \quad \lambda(x) = \sqrt{8x - 8x^2 - 1} / (4x)$$

с эксцентриситетом $\varepsilon = \sqrt{0,5}$, параметром $p = 0,25$, частотой прецессии $\gamma = (24\sqrt{2})^{-1}$ и с приведенными пределами движения $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,86$. Таким образом, большая кинетическая энергия у релятивистской частицы приводит к тому, что электрон, находясь примерно в одинаковых пределах дебаевской области, вращается по почти в два раза более сжатой эллиптической траектории с частотой прецессии приблизительно в тысячу раз превышающей частоту прецессии нерелятивистской частицы.

Рассмотрим, наконец, случай инфинитного движения релятивистского электрона. Известно, что при неограниченной траектории скорость электрона на бесконечности должна быть отлична от нуля или равна нулю, а дебаевская потенциальная энергия должна убывать с ростом расстояния от силового центра. Но в таком случае можно писать $B/L = E/m_0 c^2 = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, так что инфинитное движение частицы возможно, когда $B > L$ или $B < -L$. Возьмем следующие значения параметров: $A^2 = 0,5$; $B = -1,25$ и $L^2 = B^2/2$ (т. е. рассматривается случай, когда скорость частицы на бесконечности составляет примерно 7/10 скорости света). Функция $f(x)$ из (19) положительна при $0 < x < 0,556$ и $1,734 < x < \infty$. Отсюда вытекает, что электрон при указанных значениях полной энергии, момента импульса и энергии покоя может совершать финитное движение с возможным падением на силовой центр или же участвовать в неограниченном движении.

Разложение (25) дает возможность описать инфинитную часть движения при упомянутых значениях параметров. Действительно, интегрируя (24), получаем

$$\varphi^4 = 4 \int dx / \{x^2 \sqrt{40x^2 - 16x - 63}\}$$

или

$$r = p / \left\{ \varepsilon \cos \left(\gamma \varphi - \lambda(x) + \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right\}, \quad (27)$$

где эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{646/4} > 1$, параметр $p = 63D/8$, частота $\gamma = 189\sqrt{7/32}$,

$$\lambda(x) = \frac{3\sqrt{7(40x^2 - 16x - 63)}}{8x} + \arcsin 4/\sqrt{646} - 3\sqrt{35}/4. \quad (28)$$

Максимальное значение функции $\lambda(x)$ при $x > x_0$ равно $3\sqrt{35}/4$, причем оно достигается при бесконечном аргументе, так что кривая (27) представляет собой гиперболу. Частица с указанными параметрами приближается к силовому центру на расстояния, не превышающие расстояние $x_0 = 1,470$. Линия, соединяющая фокус гиперболы (27) с силовым центром, составляет с полярной осью угол $\approx 30^\circ$. Кривая (27) изображена на рис. 2. Заметим, что все параметры гиперболы (27) зависят от температуры посредством дебаевского радиуса.

Обобщая результаты, заметим, что и для быстрых электронов, и для нерелятивистских электронов в дебаевском поле (1) возможны ограниченные траектории, которые представляют собой условно-периодические кривые наподобие прецессирующих эллипсов (см. рис. 2). Возможны также инфинитные траектории, которые, как в кулоновском случае, имеют вид гипербол и парабол (рис. 2). Важным является существование связанных состояний электронов с полной неотрицательной энергией как в нерелятивистском, так и в релятивистском случаях.

1. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. Изд. Мир. М., 1968.
2. Власов А. А. Статистические функции распределения, Изд. Наука, М., 1966.
3. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы, Изд. Высшая школа, М., 1973.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика, Изд. Наука, М., 1969.
Ольховский Н. И. Курс теоретической механики для физиков, Изд. МГУ, М., 1978.
Коткин Г. А., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике, Изд. Наука, М., 1977.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ИФМЛ, М., 1962.
6. Wiese W. L., Kelleher D. E. *Astrophys. J.*, 166, L59 (1971).
Kohl K. Z. *Astrophys.*, 60, 115 (1964).
Barcza S. *Astron., Astrophys.*, 72, 26 (1979).
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, Изд. Наука, М., 1967.

ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ՇԱՐՔՈՒՄԸ ԱՌԱՆՑ ԲԱԽՈՒՄՆԵՐԻ ՊԼԱԶՄԱՅԻ ԳԵՐԱՅԻ ՍՅԵՐԻԿ ՏԻՐՈՒՑԹՈՒՄ

Լ. Լ. ԱԼԻԽԱՆՈՎԱ, Վ. Լ. ՀԵԿԵԼԵԿՅԱՆ, Բ. Ս. ՕԳԱՆԵՍՅԱՆ

Աշխատանքում բերված է առանց բախումների պլազմայի Դերայի սֆերիկ տիրույթում էլեկտրոնների շարժման ուսումնասիրությունը ինչպես փոքր, այնպես էլ մեծ արագությունների դեպքում: Ցույց է տրված, որ էլեկտրոնների ֆինիտ (վերջավոր) շարժումը հնարավոր է նաև էլեկտրոնների լրիվ էներգիայի դրական արժեքների դեպքում: Այդպիսի ուղեծրերի համար բերված են արտահայտություններ էլիպտիկ ինտեգրալների տեսքով: Քննարկված է լրիվ զերո էներգիայով էլեկտրոնների շրջանագծային ուղեծրի գոյության և կայունության հարցը և կատարված է համեմատություն կուլոնյան ձգողության դաշտում համապատասխան շարժման հետ: Դասական տեսության սահմաններում դիտարկված է փոքր ինչ զրգոված շրջանագծային ուղեծրով էլեկտրոնի շարժման դեպքում առաքած էլեկտրամագնիսական ալիքի երկարությունը: Տեսական արդյունքները համեմատվում են աստղաֆիզիկական փորձարարական դիտումների արդյունքների հետ:

ELECTRON MOTION IN SPHERICAL DEBYE REGION OF NON-COLLISIONAL PLASMA

L. L. ALIKHANOVA, V. L. HEKELEKYAN, R. S. OGANESSYAN

The motion of electrons in the spherical Debye region of non-collisional plasma for both low and high velocities of electrons has been analyzed in detail. It is shown that the finite motion of electrons is possible also for zero and positive values of their full energy. For such orbits the analytical expressions through elliptical integrals are given. The problems of existence and stability of circular orbits of electrons with zero full energy are discussed and a comparison with an analogous case of electron motion in purely Coulomb attraction field is carried out. The wavelength of radiation emitted by an electron moving along slightly perturbed orbit has been estimated in the classical theory framework. Comparison of theoretical results with data of astrophysical observations is made.