

УДК 621.315:529

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Г. М. АМИРДЖАНИЯН, В. С. САРДАРЯН, Л. Г. ТОРИКЯН

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

(Поступила в редакцию 1 февраля 1983 г.)

На основе полукачественной теории стохастичности обсуждается возможность возникновения статистических свойств в нелинейной струне, аппроксимируемой цепочкой осцилляторов с квадратичными силами взаимодействия. Полученные результаты используются для качественного объяснения существования солитонных решений в цепочке квадратично-нелинейных осцилляторов.

Основные уравнения и критерий стохастичности

В последнее время большое внимание уделяется нелинейно-колебательным явлениям в самых различных областях физики. Это отчасти вызвано появлением новых методов нахождения солитонных решений для широкого класса нелинейных уравнений [1].

О связи устойчивости нелинейных колебаний и статистических явлений впервые стало широко известно благодаря так называемой проблеме Ферми-Паста-Улама (ФПУ) [2]. Результатом развития идеи о глубокой связи статистических явлений с неустойчивостью нелинейных колебательных систем явилась полукачественная теория стохастичности [3]. Попытка применения этой теории в физике диэлектриков была сделана в работе [4]. В работе [5] на основе полукачественной теории стохастичности была получена оценка границы стохастичности, объясняющая наличие квазипериодического характера движения кубически-нелинейной струны.

В настоящей работе обсуждается случай одномерной системы квадратично-нелинейных осцилляторов. Будет показано, что в такой системе статистические явления возникают при весьма специфических начальных условиях.

Будем рассматривать продольные колебания квадратично-нелинейной струны с закрепленными концами, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left(1 + 2\alpha \frac{\partial x}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где α — малый параметр нелинейности. Уравнение (1) аппроксимирует колебание цепочки квадратично-нелинейных осцилляторов, приближенно представляющих струну [2]:

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l)[1 + \alpha(x_{l+1} - x_{l-1})], \quad l = 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$N = L/a, \quad x_0 = x_N = 0, \quad \alpha = 1,$$

где l — номер осциллятора, N — число осцилляторов в цепочке, a — расстояние между осцилляторами, L — длина цепочки.

Решение системы (2) ищем в виде суммы нормальных мод ($\alpha = 0$) [5]:

$$x_l = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin \frac{\pi k l}{N}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2) и приравняв коэффициенты при одинаковых $\sin(\pi k l / N)$, получим

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = -\frac{a}{\sqrt{2N}} \left(\sum_{m=1}^{k-1} A_m Q_{k-m} \omega_{k-m}^2 - \sum_{m=k+1}^{N-1} A_m Q_{k+N-m} \omega_{k+N-m}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{N-k-1} A_m Q_{k+m} \omega_{k+m}^2 + \sum_{m=k+1}^{N-1} A_m Q_{m-k} \omega_{m-k}^2 \right), \quad (4)$$

где

$$\omega_k \equiv 2 \sin(\pi k / 2N), \quad A_m \equiv Q_m \omega_m \sqrt{4 - \omega_m^2}.$$

Здесь рассматривается только первое приближение по $a/\sqrt{2N}$. В этом приближении ($a/\sqrt{2N} \ll 1$) из системы (4) следует, что в нерезонансном случае возмущение не вызывает изменения частот нормальных колебаний [6]. Поэтому возбуждение одной моды не приведет к неизохронным колебаниям, в отличие от кубически-нелинейного случая [5]. Для построения модели возмущенного неизохронного осциллятора необходимо, как это видно из (4), начальное возбуждение двух мод — k и $2k$, находящихся в комбинационном резонансе ($2\omega_k \approx \omega_{2k}$), который реально возможен при $k \ll N$.

Следуя асимптотическому методу [6, 7], рассмотрим систему порождающих уравнений для (4) в случае начального возбуждения мод k и $2k$:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left(1 + \frac{2\omega_k \sqrt{4 - \omega_k^2}}{\sqrt{2N}} Q_{2k} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{Q}_{2k} + \omega_{2k}^2 Q_{2k} \left(1 + \frac{\omega_k^3 \sqrt{4 - \omega_k^2}}{\omega_{2k}^2 \sqrt{2N}} \frac{Q_k^2}{Q_{2k}} \right) = 0.$$

Произведя в (5) подстановку Ван-дер-Поля $Q_{2k} = C_{2k} \cos \theta_{2k}$, $Q_k = C_k \cos \theta_k$ и выполнив усреднение по времени [7], получим

$$\omega'_k \approx \omega_k + \frac{\omega_k^2 \sqrt{4 - \omega_k^2}}{2\sqrt{2N}} \bar{C}_{2k} \cos(2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k}), \quad (6)$$

$$\omega'_{2k} \approx \omega_{2k} + \frac{\omega_k^3 \sqrt{4 - \omega_k^2}}{4\sqrt{2N}\omega_{2k}} \frac{\bar{C}_k^2}{\bar{C}_{2k}} \cos(2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k}),$$

где $\bar{\theta}_k$, $\bar{\theta}_{2k}$ и $\bar{C}_k$, $\bar{C}_{2k}$ — усредненные по времени фазы и амплитуды колебаний мод k и $2k$, ω'_k , ω'_{2k} — частоты неизохронных колебаний.

В случае резонанса $2\bar{\theta}_k \simeq \bar{\theta}_{2k}$ амплитуды $\bar{C}_k$ и $\bar{C}_{2k}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\bar{C}}_k &\simeq -\frac{\alpha\omega_k^2\sqrt{4-\omega_k^2}}{2\sqrt{2N}}\bar{C}_k\bar{C}_{2k}\sin(2\bar{\theta}_k-\bar{\theta}_{2k}), \\ \dot{\bar{C}}_{2k} &\simeq \frac{\alpha\omega_k^3\sqrt{4-\omega_k^2}}{4\sqrt{2N}\omega_{2k}}\bar{C}_k^2\sin(2\bar{\theta}_k-\bar{\theta}_{2k}).\end{aligned}\quad (7)$$

Из (7) следует уравнение, определяющее связь между $\bar{C}_{2k}$ и $\bar{C}_k$:

$$\frac{d\bar{C}_k}{d\bar{C}_{2k}} \simeq -\frac{2\omega_{2k}}{\omega_k} \frac{\bar{C}_{2k}}{\bar{C}_k}. \quad (8)$$

Знак минус в (8) соответствует факту перекачки энергии между двумя модами k и $2k$. Заметим, что усреднением системы (6) по времени с учетом резонанса легко получить известное выражение [8] для гамильтониана системы двух взаимодействующих мод в переменных действие—угол.

Таким образом, из (6)—(8) следует, что при резонансе $2\omega_k \simeq \omega_{2k}$ ($k, 2k \ll N$) моды k и $2k$ ведут себя как неизохронные осцилляторы во внешнем поле остальных мод:

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left(1 + \frac{2\alpha\omega_k\sqrt{4-\omega_k^2}}{\sqrt{2N}} Q_{2k}\right) &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2N}} \sum_n F_{kn} \cos \theta_{kn}, \\ \ddot{Q}_{2k} + \omega_{2k}^2 Q_{2k} \left(1 + \frac{\alpha\omega_k^3\sqrt{4-\omega_k^2}}{\omega_{2k}^2\sqrt{2N}} \frac{Q_k^2}{Q_{2k}}\right) &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2N}} \sum_n F_{2k,n} \cos \theta_{2k,n},\end{aligned}\quad (9)$$

где $\alpha F_{kn}/\sqrt{2N}$, $\alpha F_{2k,n}/\sqrt{2N}$ — коэффициенты рядов Фурье, получающихся при подстановке $Q_m = C_m \cos \theta_m$ в правую часть (4), через θ_{kn} обозначены суммы вида $\theta_m \pm \theta_{k-m}$, $\theta_m \pm \theta_{k+N-m}$, $\theta_m \pm \theta_{k+m}$, $\theta_m \pm \theta_{m-k}$. Таким образом, уравнения (9) описывают движение неизохронных осцилляторов в поле внешних сил с амплитудами $\alpha F_{kn}/\sqrt{2N}$, $\alpha F_{2k,n}/\sqrt{2N}$ и частотами θ_{kn} , $\theta_{2k,n}$.

Метод усреднения [7] для первого уравнения системы (9) дает

$$\dot{\psi}_{kn} = \frac{d\Omega_{kn}}{d\bar{C}_k} \frac{\alpha F_{kn}}{2\sqrt{2N}} \sin \psi_{kn}, \quad (10)$$

где $\psi_{kn} \equiv \theta_k - \theta_{2k}$, $\Omega_{kn} \equiv \theta_{kn} - \omega_k$. Отсюда для размера сепаратрисы [3, 5] имеем выражение

$$|\dot{\psi}_{kn}|_{\max} = \sqrt{\left| \frac{\alpha F_{kn}}{2\sqrt{2N}\omega_k} \frac{d\Omega_{kn}}{d\bar{C}_k} \right|}. \quad (11)$$

Используя аппроксимационную формулу $(\partial x / \partial z)_l \simeq (x_{l+1} - x_{l-1})/2$, уравнение (1) и полагая $\bar{C}_k = \bar{C}_{2k}$, для k -ой моды получим выражение

$$\left| \frac{\alpha F_{kn}}{2\sqrt{2N}\omega_k} \right| \simeq \frac{\alpha\sqrt{2N}}{6} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{\max}^2. \quad (12)$$

Дифференцирование Ω_{kn} по $\bar{C}_k$ дает

$$\left| \frac{d\Omega_{kn}}{d\bar{C}_k} \right| = \frac{d\omega'_k}{d\bar{C}_k} = \frac{d\Delta\omega_k}{d\bar{C}_k}, \quad (13)$$

где $\Delta\omega'_k \equiv \omega'_k - \omega_k$.

Подставляя (6) в (13) и учитывая (8), получим

$$\left| \frac{d\Omega_{kn}}{d\bar{C}_k} \right| = \frac{\alpha\omega_k^3 \sqrt{4 - \omega_k^2}}{4\omega_{2k} \sqrt{2N}} \cos(2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k}). \quad (14)$$

В (14), как и в (12), принимается, что $\bar{C}_k = \bar{C}_{2k}$.

Из (11), (12), (14) и выражения для среднего расстояния между резонансами $\Delta\omega = 2\pi/N$ при $k \ll N$ [5] для границы стохастичности $s \equiv |\psi_{kn}|_{\max}/\Delta\omega \gtrsim 1$ [3] (s — параметр стохастичности) следует оценка

$$2\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{\max} \gtrsim \frac{4\sqrt{24}}{k |\cos(2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k})|^{1/2}}. \quad (15)$$

Аналогичное выражение получается и для границы стохастичности $2k$ -ой моды.

Анализ полученных результатов

Из определения параметра стохастичности и вышесказанного легко можно получить соотношение

$$s = \frac{\alpha}{2\sqrt{24}} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{\max} |\cos(2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k})|^{1/2}. \quad (16)$$

Формула (16) показывает, что параметр стохастичности s зависит от разности фаз $2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k}$, а значит и от времени. Отсюда следует, что если $s \gg 1$, то параметр стохастичности будет со временем уменьшаться и стремиться к единице ($s \rightarrow 1$). Действительно, как это видно из (6), неизокронность обеспечивается условием малости величины $2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k}$. Но при $s \gg 1$ начнется процесс стохастизации k -ой моды и разность фаз $2\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{2k}$ начнет увеличиваться, что приведет к уменьшению параметра стохастичности s , а это означает ослабление стохастического процесса. Таким образом, сильный стохастический процесс в квадратично-нелинейном случае является неустойчивым, т. е. термализация в квадратично-нелинейном случае может быть только слабой и возникает при специфических начальных условиях. Эти условия заключаются, во-первых, в том, что вначале одновременно возбуждаются две моды с номерами k и $2k$, во-вторых, эти моды должны находиться в резонансе между собой, что, в свою очередь, возможно при $k, 2k \ll N$.

Наличие солитонных решений в цепочке квадратично-нелинейных осцилляторов, полученных в численных экспериментах Забуским и Крускалом, можно объяснить следующим образом. Если в квадратично-нелинейной цепочке осцилляторов при достаточно больших N возбудить два волновых пакета, содержащих много мод в интервале $[k - \Delta k, k + \Delta k]$, где

1 $\ll \Delta k \ll k \ll N$, то явление термализации не будет иметь места, так как в среднем равное распределение вложенной в систему энергии по всем остальным модам (термализация) произойдет только при наличии двух низких мод k и $2k$ ($k, 2k \ll N$), находящихся в резонансе между собой. Кроме того, эти пакеты по мере движения почти не изменяют своей формы благодаря малости дисперсии ($k \ll N$) и нелинейности ($\alpha/\sqrt{2N} \ll 1$), что указывает на существование солитонных решений. Этот вывод дополняет утверждение работ [9, 10], в которых отсутствие термализации объясняется наличием солитонных решений в квадратично-нелинейном случае.

В заключение авторы приносят благодарность Б. В. Чирикову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. Советское радио, М., 1977, стр. 368.
2. Ферми Э. Научные труды, Изд. Наука, М., 1972, т. 2, стр. 712.
3. Заславский Г. М., Чириков Б. В. УФН, 105, 3 (1971).
4. Торилян Л. Г. Изв. АН АрмССР, Физика, 16, 95 (1981).
5. Израйлев Ф. М., Чириков Б. В. ДАН СССР, 166, 57 (1966).
6. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики, Изд. Наука, М., 1982, стр. 400.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Изд. Наука, М., 1974, стр. 504.
8. Ford J., Linsford G. H. Phys. Rev. Lett., 1, 59 (1970).
9. Солитоны в действии (Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта), Изд. Мир, М., 1981, стр. 312.
10. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Phys. Rev. Lett., 15, 240 (1965).

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐՆԵՐԻ ՇՂԹԱՅԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Հ. Մ. ԱՄԻՐԴՅԱՆՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ, Լ. Գ. ԹՈՐԻԿՅԱՆ

Աշխատանքում ստոխաստիկության կիսաորակական տեսության հիման վրա քննարկվում է վիճակագրական հատկությունների ծագման հնարավորությունը ոչ գծային լարում, որն ապրոքսիմացվում է փոխազդեցության բառակուսային ուժերով կապված օսցիլյատորների շղթայով: Յույց է տրված, որ առաջին մոտավորությամբ ըստ ոչ գծայինության պարամետրի այդպիսի շղթայում կարող է դիտվել միայն թույլ ստոխաստացում միանգամայն յուրահատուկ սկզբնական պայմանների դեպքում: Ստացված արդյունքները օգտագործվում են երկրորդ կարգի ոչ գծային օսցիլյատորների շղթայում սոլիտոնային լուծումների գոյության որակական բացատրման համար:

ON THE STATISTICAL PROPERTIES OF A NONLINEAR CHAIN OF OSCILLATORS

G. M. AMIRDZHANYAN, V. S. SARDARYAN, L. G. TORIKYAN

On the basis of semiquantitative theory of stochasticity the possibility of the rise of statistical properties in a nonlinear string approximated by a chain of oscillators with square-law interaction forces is discussed. It is shown that in the first approximation in the nonlinearity parameter only weak stochastization under rather specific initial conditions can be observed. The obtained results were used for qualitative explanation of the existence of soliton-like solutions in a chain of squarely-nonlinear oscillators.