Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 18, вып. 3, 156—161 (1983)

УДК 539.2;530.145

«СВЕРХПОДВИЖНОСТЬ» СВЯЗАННЫХ ПРИМЕСОНОВ В КВАНТОВЫХ КРИСТАЛЛАХ

Г. А. ВАРДАНЯН

Ереванский государственный университет

А. С. СААКЯН

Ереванский политехнический институт

(Поступила в редакцию 5 сентября 1982 г.)

Показано, что наличие слабо связанных состояний примесонов He^3 в твердом He^4 приводит к возникновению в кристалле новой, бозевской, ветви колебаний. Вычислен коэффициент диффузии элементарных возбуждений фононного типа. Показано, что коэффициент диффузии претерпевает сильный рост в зависимости от внешнего давления.

1. Известно, что в кристаллах возможно образование слабосвязанных состояний как одинаковых, так и разных возбуждений (двух фононов, фонона и электрона, двух электронов) [1]. Это спаривание происходит вблизи некоторых специальных точек в пространстве квазиимпульсов возбуждений, которые могут находиться вблизи оси или плоскости симметрии кристалла. Математическая ситуация здесь совершенно аналогична ситуации образования куперовских пар в сверхпроводниках.

В квантовых кристаллах также существуют связанные состояния элементарных возбуждений (примесонов, вакансионов, дефектонов) [2, 3]. Их уникальной особенностью является то, что они движутся свободно, но лишь вдоль определенных плоскостей или осей симметрии кристалла, т. е. являются двумерными или одномерными квазичастицами в объеме трехмерного кристалла.

В работах [2, 3] показано, что в квантовых растворах He^3—He^4 появляются слабосвязанные состояния примесонов He^3, аналогичные рассмотренным в [1]. При определенных условиях эти связанные состояния совершают когерентное движение в некоторой плоскости, перпендикулярной оси симметрии кристалла. Квантовая подвижность этих двумерных квазичастиц может претерпевать сильный рост в зависимости от внешнего давления.

Ниже предлагается микроскопический подход к вычислению коэффициента диффузии (КД) связанных состояний примесонов в квантовых кристаллах.

Система связанных примесонов рассматривается как слабо-неидеальный бозе-газ (полагаем, что спаривание происходит с антипараллельными спинами). При достаточно низких температурах в газе связанных примесонов происходит бозе-конденсация, благодаря чему в системе появляется новая ветвь возбуждений, спектр квазичастиц имеет акустический характер при малых значениях квазиимпульса. Как будет показано ниже, именно эти возбуждения являются сверхподвижными в отмеченном выше смысле.

2. Пусть кристалл имеет ось симметрии выше второго порядка (в ГПУ кристаллах He — гексагональная ось). Тогда для малых χ суммарную энергию двух взаимно рассеивающихся квазичастиц можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{K}/2)+\varepsilon(\mathbf{k}-\mathbf{K}/2)=2\varepsilon(\mathbf{K}_0/2)+a_\perp(P)\,\mathbf{q}^2+ \\ +\Delta a_\parallel^2(P)\,\chi^2\equiv\varepsilon_\perp(\mathbf{q})+\varepsilon_\parallel(\chi), \tag{1}$$

где $\mathbf{k}=\mathbf{q}+\chi$, q и χ — компоненты вектора $\mathbf{k}$ вдоль оси симметрии и перпендикулярно этой оси, $\mathbf{K}_0$ — некоторая точка в пространстве квазиимпульсов, вблизи которой образуется связанное состояние, Δ — ширина примесонной зоны, P — внешнее давление. За начало отсчета энергии выбираем $2\varepsilon(\mathbf{K}_0/2)$.

Пусть система связанных примесонов описывается следующим модельным гамильтонианом:

$$\hat{H}=\sum_{\chi,\mathbf{q}}\varepsilon_\perp(\mathbf{q})\,a_{\mathbf{q}}^+(\chi)\,a_{\mathbf{q}}(\chi)+\sum_{\chi,\mathbf{q}}\varepsilon_\parallel(\chi)\,b_\chi^+(\mathbf{q})\,b_\chi(\mathbf{q})+ \\ +\frac{g_\perp}{2V}\sum_{\chi,\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}_1}^+(\chi)\,a_{\mathbf{q}_2}^+(\chi)\,a_{\mathbf{q}_3}(\chi)\,a_{\mathbf{q}_4}(\chi)+ \\ +\frac{g_\parallel}{2V}\sum_{\chi,\mathbf{q}}b_{\chi_1}^+(\mathbf{q})\,b_{\chi_2}^+(\mathbf{q})\,b_{\chi_3}(\mathbf{q})\,b_{\chi_4}(\mathbf{q}). \tag{2}$$

Операторы $a_{\mathbf{q}}(\chi)$, $a_{\mathbf{q}}^+(\chi)$, $b_\chi(\mathbf{q})$, $b_\chi^+(\mathbf{q})$ относятся к одним и тем же квазичастицам и удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям. Для них выполняется следующее очевидное соотношение:

$$a_0^2+\sum_{\chi,\mathbf{q}}{}'\,a_{\mathbf{q}}^+(\chi)\,a_{\mathbf{q}}(\chi)=b_0^2+\sum_{\chi,\mathbf{q}}{}'\,b_\chi^+(\mathbf{q})\,b_\chi(\mathbf{q}). \tag{3}$$

В силу того, что $a_0^+a_0=b_0^+b_0=N_0\approx N\gg 1$, можно a_0, a_0^+, b_0, b_0^+ считать c-числами, пренебрегая их некоммутативностью.

Для нахождения энергетического спектра слабо возбужденных состояний газа связанных примесонов воспользуемся методом канонических преобразований [4].

Потенциал взаимодействия двух связанных примесонов состоит из дальнодействующей части $v(\mathbf{R})$ и короткодействующей части, обусловленной тем, что два связанных состояния не могут занять одну и ту же пару узлов решетки. Для учета обеих частей потенциала взаимодействия поступим следующим образом. Переход к импульсному представлению в потенциале $v(\mathbf{R})$ осуществим с помощью волновой функции связанного состояния двух примесонов, взаимно рассеивающихся как на потенциале непроницаемости [5]. Для больших $R_\perp$ эта волновая функция имеет вид

$$\Psi(R_\perp) = \frac{\pi\sqrt{2\delta_0 k_\perp}\,\lambda\Delta}{4\beta\sqrt{\alpha R_\perp}}\exp(-k_\perp R_\perp), \tag{4}$$

где $\delta_0 = 2\varepsilon(\mathbf{K}_0/2) - \varepsilon$ — энергия связи квазичастиц, $\lambda = \tau V_0$,

$$k_\perp = \sqrt{2\varepsilon(\mathbf{K}_0/2)/\alpha}\,,\quad \alpha = (P - P_k)\left(\frac{\partial a_\perp}{\partial P}\right)_{P=P_k},\quad \beta = \frac{\Delta a_\parallel^2}{2}.$$

Тогда

$$g_\perp = 2\pi\int \Psi(R_\perp)\, v(R)\, R_\perp dR_\perp dR_\parallel$$

или

$$g_\perp = \pi^2\sqrt{\frac{2\delta_0 k_\perp}{\alpha}}\,\lambda\,\frac{A(k_\perp)}{a_\parallel^2}, \tag{5}$$

где

$$A(k_\perp) = \int_0^\infty v(\mathbf{R})\exp(-k_\perp R_\perp)\, R_\perp^{1/2}\, dR_\perp\, dR_\parallel.$$

В рассматриваемом приближении спаривание примесонов происходит в плоскости, перпендикулярной оси симметрии кристалла, поэтому константу взаимодействия $g_\parallel$ рассчитаем обычным способом в приближении «медленных столкновений» ($|\mathbf{kR}| \ll 1$):

$$g_\parallel = 2\pi\int v(\mathbf{R})\, R_\perp dR_\perp\, dR_\parallel. \tag{6}$$

Как следует из (5), константа взаимодействия $g_\perp$ зависит от давления как $a_\parallel^{-2}$, т. е. возрастает при приближении к некоторому значению $P = P_k$. Ясно, однако, что существует естественное ограничение на область давлений P — условие слабой неидеальности газа связанных состояний примесонов:

$$\frac{m^* g_\perp}{4\pi\hbar^2}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \ll 1,$$

где m^* — эффективная масса примесона.

При температурах, близких к абсолютному нулю, гамильтониан (2) можно разложить по степеням малых величин $a_q(\chi)$, $a_q^+(\chi)$, $b_\chi(q)$, $b_\chi^+(q)$. Оставляя только члены второго порядка по операторам, получим следующий приведенный гамильтониан:

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2V}(q_\parallel + q_\perp) + \sum_{\chi,\mathbf{q}}{}' [\varepsilon_\perp(\mathbf{q})\, a_\mathbf{q}^+(\chi)\, a_\mathbf{q}(\chi) + \varepsilon_\parallel(\chi)\, b_\chi^+(\mathbf{q})\, b_\chi(\mathbf{q})] +$$

$$+ N\frac{g_\perp}{2V}\sum_{\chi,\,\mathbf{q}}{}' [a^+_{\mathbf{q}}(\chi)\, a^+_{-\mathbf{q}}(\chi) + a_{\mathbf{q}}(\chi)\, a_{-\mathbf{q}}(\chi) + 2\, a^+_{\mathbf{q}}(\chi)\, a_{\mathbf{q}}(\chi)] +$$

$$+ N\frac{g_\parallel}{2V}\sum_{\chi,\,\mathbf{q}}{}' [b^+_{\chi}(\mathbf{q})\, b^+_{-\chi}(\mathbf{q}) + b_{\chi}(\mathbf{q})\, b_{-\chi}(\mathbf{q}) + 2\, b^+_{\chi}(\mathbf{q})\, b_{\chi}(\mathbf{q})]. \tag{7}$$

В (7) для получения первого члена, пропорционального $a_0^+ a_0^+ a_0 a_0$, $b_0^+ b_0^+ b_0 b_0$ использовано точное соотношение (3).

Для диагонализации (7) воспользуемся следующим каноническим преобразованием:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{q}}(\chi) &= \sum_{\nu=1,\,2} u_{1\nu}(\mathbf{q},\,\chi)\, \xi_\nu(\mathbf{q},\,\chi) + v^*_{1\nu}(\mathbf{q},\,\chi)\, \xi^+_\nu(-\mathbf{q},\,-\chi), \\ b_\chi(\mathbf{q}) &= \sum_{\nu=1,\,2} u_{2\nu}(\mathbf{q},\,\chi)\, \xi_\nu(\mathbf{q},\,\chi) + v^*_{2\nu}(\mathbf{q},\,\chi)\, \xi^+_\nu(-\mathbf{q},\,-\chi), \end{aligned} \tag{8}$$

где ξ_ν, ξ^+_ν — новые бозе-операторы, а коэффициенты $u_{\alpha\nu}$ и $v_{\alpha\nu}$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha [u_{\alpha\mu}(\mathbf{p})\, u^*_{\alpha\nu}(\mathbf{p}) - v_{\alpha\mu}(\mathbf{p})\, v^*_{\alpha\nu}(\mathbf{p})] = \delta_{\mu\nu}, \\ &\sum_\alpha [u_{\alpha\mu}(\mathbf{p})\, v^*_{\alpha\nu}(\mathbf{p}) - u_{\alpha\nu}(\mathbf{p})\, v^*_{\alpha\mu}(\mathbf{p})] = 0, \\ &\sum_\alpha [u_{\alpha\nu}(\mathbf{p})\, u^*_{\beta\nu}(\mathbf{p}) - v_{\beta\nu}(\mathbf{p})\, v^*_{\alpha\nu}(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta}, \\ &\sum_\nu [u_{\beta\nu}(\mathbf{p})\, v^*_{\alpha\nu}(\mathbf{p}) - u_{\alpha\nu}(\mathbf{p})\, v^*_{\beta\nu}(\mathbf{p})] = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В результате (7) можно преобразовать к виду

$$\widehat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{p}\neq 0}\sum_{\nu=1,\,2} E_\nu(\mathbf{p})\, \xi^+_\nu(\mathbf{p})\, \xi_\nu(\mathbf{p}), \tag{10}$$

где E_0 в первом порядке по константам взаимодействия определяется первым слагаемым в (7).

Спектр возбуждений $E_\nu(\mathbf{p})$ и коэффициенты $u_{\alpha\nu}$ и $v_{\alpha\nu}$ можно найти из следующей системы однородных уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_\beta \{[S_{\alpha\beta} - E_\nu\, \delta_{\alpha\beta}]\, u_{\beta\nu} + R_{\alpha\beta}\, v_{\beta\nu}\} = 0, \\ &\sum_\beta \{R_{\alpha\beta}\, u_{\beta\nu} + [S_{\alpha\beta} + E_\nu\, \delta_{\alpha\beta}]\, v_{\beta\nu}\} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$S_{\alpha\beta} = \left[\varepsilon_\alpha(\mathbf{p}) + \frac{N}{2V}\, g_\alpha\right]\delta_{\alpha\beta},\quad R_{\alpha\beta} = \frac{N}{V}\, g_\alpha\, \delta_{\alpha\beta},\quad \alpha,\,\beta = 1,\,2,\quad g_{1,\,2} = g_\parallel,\, g_\perp. \tag{12}$$

Из равенства нулю детерминанта системы (11) находим

$$E_1(\mathbf{q}) = \sqrt{\varepsilon_\perp^2(\mathbf{q}) + \frac{N}{V} g_\perp \varepsilon_\perp(\mathbf{q})}, \quad E_2(\chi) = \sqrt{\varepsilon_\parallel^2(\chi) + \frac{N}{V} g_\parallel \varepsilon_\parallel(\chi)}. \tag{13}$$

При малых квазиимпульсах

$$E_1(\mathbf{q}) = c_\perp q, \quad E_2(\chi) = c_\parallel \chi,$$

где

$$c_\perp = \left[\frac{N}{\hbar^2 V} g_\perp a_\perp(P)\right]^{1/2}, \quad c_\parallel = \left[\frac{N}{\hbar^2 V} g_\parallel a_\parallel^2(P)\right]^{1/2} -$$

скорости звука вдоль оси симметрии кристалла и в плоскости, перпендикулярной ей. При приближении внешнего давления к P_k $c_\perp$ возрастает, в то время как $c_\parallel$ уменьшается до нуля, что очевидно, так как связанные состояния, которые образуются, двумерны.

Итак, в квантовом кристалле появляется новая, бозевская ветвь колебаний, причем спектр возбуждений и скорости звука зависят от внешнего давления.

3. Вычислим КД элементарных возбуждений при абсолютном нуле ($T = 0$). Очевидно, что единственными возбуждениями в этом случае являются возбуждения фононного типа.

Формула Кубо

$$D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{V}(t) \hat{V}(0) \rangle dt \tag{14}$$

раскрывается очень просто (см., например, [6]), так как отсутствует взаимодействие между возбуждениями. Приведем сразу окончательный результат для КД возбуждений в плоскости, перпендикулярной оси симметрии кристалла:

$$D_\perp = \frac{\pi a^4}{16} \frac{k_\perp \delta_0}{\hbar \alpha a_\perp(P)} \frac{\lambda^2 A^2(k_\perp)}{a_\parallel^4(P)}. \tag{15}$$

Таким образом, как и в работе [5], $D_\perp \sim a_\parallel^{-4}(P)$, что является следствием возникновения в квантовом кристалле бозевской ветви колебаний из-за спаривания примесонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Питаевский Л. П.* ЖЭТФ, 70, 738 (1976).
2. *Андреев А. Ф., Лифшиц Е. М.* ЖЭТФ, 56, 2057 (1969).
3. *Андреев А. Ф.* УФН, 118, 251 (1975).
4. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Статистическая физика, т. II, Изд. Наука, М., 1978.
5. *Варданян Г. А., Саакян А. С.* ФТТ, 23, 2881 (1981).
6. *Агранович В. М., Галанин М. Д.* Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах, Изд. Наука, М., 1977.

ԽԱՌՆՈՒՐԴԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԳԵՐՇԱՐԺՈՒՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐՈՒՄ

Գ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ա. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ցույց է տրված, որ He^3 *խառնուրդային քվազիմասնիկների թույլ կապված վիճակների առկայությունը բյուրեղական* He^4*-ում բերում է նոր՝ բոզե-բնույթի տատանումների ճյուղի* առաջացմանը, որը պայմանավորված է կապված վիճակների բոզե-կոնդենսացիայով: Կուբոյի բանաձևի հիման վրա ստացված է ֆոնոնային տարրական գրգռումների դիֆուզիայի գործակիցը: Ցույց է տրված, որ դիֆուզիայի գործակիցը որպես արտաքին ճնշման ֆունկցիա կտրուկ աճում է:

"SUPERMOBILITY" OF BOUND IMPURITY QUASI-PARTICLES IN QUANTUM CRYSTALS

G. A. VARDANYAN, A. S. SAAKYAN

The presence of weakly bound states of He^3 impurity quasi-particles in solid He^4 crystals was shown to give rise to a new, bose oscillation mode. The coefficient of phonon-type excitation diffusion was calculated and shown to strongly increase depending on the external pressure.