

УДК 669.71:620.183

О ДЕФОРМАЦИОННОМ РЕЛЬЕФЕ НА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛОВ

В. М. АДАМЯН, С. Л. СМОЛЯР, А. А. ХАНОНКИН

Одесский государственный университет

(Поступила в редакцию 25 мая 1981 г.)

На поверхности кристаллов при определенных видах нагружения возникает периодический складчатый рельеф. Длина волны рельефа меняется от 10 нм до нескольких микрометров (так называемые бороздки) или имеет величину порядка миллиметра (гофры). В настоящей работе указанные виды рельефа рассматриваются как проявления потери механической устойчивости. На примере ортотропной пластины, подвергнутой действию нагрузки с постоянным градиентом, показано существование двух ветвей решения задачи об устойчивости, отличающихся зависимостью поперечной волны рельефа Δ от давления. Одна из ветвей описывает мелкую рябь на поверхности ($\Delta \ll H$, H — толщина пластины). С увеличением давления Δ возрастает. В изотропном случае ветвь отсутствует. Если сопоставить ее с бороздками, то объясняются свойства последних. Вторая ветвь характеризуется размерами Δ порядка толщины (или длины) пластины. При повышении давления Δ уменьшается. Эта ветвь соответствует гофрам.

Проблема деформационного рельефа занимает важное место в физике прочности и пластичности монокристаллов. Экспериментальные результаты исследования упруго-пластической и циклической деформаций свидетельствуют о том, что на поверхности деформированных образцов при определенных условиях нагружения возникает складчатый рельеф.

Такой деформационный рельеф порождает, как правило, образование и развитие трещины в материалах, ведет к разрушению поверхности деталей. Но даже в тех случаях, когда образец сохраняет механическую целостность после возникновения рельефа, волнообразная форма поверхности влияет на различные свойства материалов, в частности, ухудшает отражательную способность дифракционных рентгеновских зеркал.

Появление деформационного рельефа на поверхности изогнутых монокристаллов наблюдалось [1—6] как на металлах (алюминий, кремнистое железо, цинк), так и на ионных кристаллах (каменная соль, бромид калия). Деформационный рельеф имел вид периодических пологих складок (гофров) с длиной порядка миллиметра. При возрастании числа циклов нагружения количество гофров увеличивалось, соответственно уменьшалась длина волны, а амплитуда возрастала.

Подобный вид рельефа был обнаружен при электронномикроскопическом изучении поверхности в работах [7, 8]. Было замечено, что поверхность волнообразных складок покрыта, в свою очередь, еще более мелкими регулярными складками с характерным размером порядка микрометра.

В связи с большим интересом к проблеме развития трещин и их роли в разрушении материалов особенно тщательно аналогичный рельеф (так называемые бороздки) изучался на поверхности изломов различных веществ (см. [9], где приведены многочисленные ссылки на оригинальные работы). Бороздки возникали как при растяжении, так и при сжатии образцов.

В зависимости от уровня напряжений длина волны рельефа менялась от 10 нм (при низком напряжении) до десятков микрометров (при высоком напряжении). Было установлено, что магистральная трещина распространяется, как правило, перпендикулярно к бороздкам, причем длина волны последних максимальна у вершины трещины и уменьшается при увеличении расстояния от вершины. Как и в предыдущем случае, более крупные бороздки могут быть покрыты мелкими.

Для объяснения возникновения бороздчатости было предложено большое число наглядных схем и моделей, основанных, как правило, на дислокационных механизмах. В частности, предполагается, что бороздка возникает в результате многократного скольжения в различных кристаллографических плоскостях, происходящего в вершине распространяющейся трещины. Работ, посвященных объяснению появления микроскопических складок на поверхности при отсутствии трещины, найти не удалось.

В статье [10] была выдвинута гипотеза о том, что гофры на поверхности деталей машин возникают в результате потери устойчивости тонкого поверхностного слоя материала. Поэтому авторы [10] рассмотрели поведение тонкого стержня, скрепленного с упругим полупространством. При некотором значении деформации полупространства прямолинейная форма стержня оказывается неустойчивой, и стержень изгибается по определенному числу полуволн. Для полудлины волны авторы получили выражение

$$\Lambda = \frac{\pi}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{E}} H \sqrt[3]{\frac{E_c}{E}},$$

а для критического напряжения —

$$\sigma_{кр} = \frac{\sqrt[3]{9}}{4} E \sqrt[3]{\frac{E_c}{E}}.$$

Здесь H — толщина стержня, E_c и E — модули Юнга стержня и материала полупространства.

Нетрудно заметить, что даже при переходе стержня в пластическую область ($E_c \ll E$) критическая нагрузка оказывается для большинства веществ выше предела прочности или совпадает с ним. Кроме того, отсутствие зависимости $\sigma_{кр}$ от соотношения толщины и длины стержня говорит о недостаточности использованной модели. Тем не менее на основе приведенных выражений для $\sigma_{кр}$ и Λ одним из авторов обсуждаемой работы была построена теория контактного разрушения в результате потери устойчивости тонкого поверхностного слоя [11].

Цель настоящей работы — показать, что все перечисленные выше виды рельефа могут быть проявлением потери механической устойчивости

кристаллов при действии на них неоднородных по толщине нагрузок. Описанная ниже модель соответствует кристаллам ромбической системы. Как частный случай, она содержит представляющие наибольший интерес кубические кристаллы.

Рассмотрим прямоугольную пластину из ортотропного материала с осями упругой симметрии, параллельными сторонам. Плоскость xu декартовой системы координат выберем в срединной плоскости пластины. В направлении координаты y пластина считается бесконечной, длина пластины — L , толщина — $2h$ (рис. 1). На боковые поверхности, перпендикулярные оси x , действуют давления, распределенные по закону

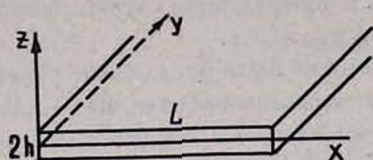


Рис. 1.

$$p = p_0 \frac{z}{h}.$$

На поверхностях $z = \pm h$ внешние силы отсутствуют.

Напряженное состояние пластины описывается (в пренебрежении объемными силами) уравнениями

$$\sigma_{xx}^0 = -p, \sigma_{zz}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{xz}^0 = \sigma_{xy}^0 = \sigma_{yz}^0 = 0, \quad (1)$$

σ_{ij}^0 — тензор напряжений.

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояния (1). Будем исходить из положений нелинейной теории упругости. Для компонент возмущений соответствующие линеаризованные уравнения (в предположении о малости возмущений и тождественности геометрии невозмущенного равновесия и недеформированного состояния) имеют вид [12]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{jk}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (2)$$

где σ_{ij} — возмущение тензора напряжений, $u_i(x, z)$ — возмущение поля смещений, ρ — плотность.

Решение системы (2) можно искать в виде

$$u_i = w_i(x, z) e^{st}.$$

Согласно динамическому критерию устойчивости, состояние (1) будет устойчиво, если $\text{Re } s \leq 0$. По мере возрастания давления p комплексный показатель s может перейти в правую полуплоскость, и состояние (1) станет неустойчивым. Значение давления $p_{кр}$, такого, что при $p > p_{кр}$ $\text{Re } s > 0$, называется критическим.

Как известно [13], при наложении на p некоторых условий (например, если внешняя нагрузка обладает потенциалом или если работа внешних сил при соответствующих перемещениях равна нулю) показатель s

может перейти в правую полуплоскость только через начало координат. При этом справедлив эйлеровский критерий устойчивости, заключающийся в утверждении, что состояние неустойчиво для значений $p > p_*$, где p_* — давление, при котором происходит бифуркация состояния равновесия, т. е. могут существовать две формы равновесия.

В рассматриваемом случае ограничения на вид внешней нагрузки будут выполнены, поэтому ниже неустойчивость понимается в эйлеровском смысле, т. е. как возможность существования двух разных решений уравнений равновесия при заданных граничных условиях.

При малых деформациях σ_{ij} и u_i связаны законом Гука для ортотропной пластины:

$$\sigma_{xx} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \sigma_{zz} = \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \lambda_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения:

$$u(x, z) = u_x, \quad v(x, z) = u_z,$$

$$\lambda_1 = \lambda_{xxxx}, \quad \lambda_2 = \lambda_{xxzz}, \quad \lambda_3 = \lambda_{zzzz}, \quad \lambda_4 = \lambda_{xzxz},$$

λ_{ijkl} — упругие модули.

После подстановки (1) и (3) в (2) получим уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda_2 + \lambda_4) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \lambda_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda_4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda_2 + \lambda_4) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно показать, что линейаризованные граничные условия в напряжениях, записанные на невозмущенной поверхности, имеют в нашем случае вид

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = -p \frac{\partial v}{\partial x}, \quad z = \pm h. \quad (5)$$

На торцах пластины $x = 0, L$ граничные условия есть

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0. \quad (6)$$

При расчете удобно поступить следующим образом. Будем считать, что σ_{xx} на торцах $x = 0, L$ удовлетворяет некоторым ненулевым граничным условиям. Если обозначить через u_0 обычное (не меняющее плоской формы боковых поверхностей $z = \pm h$) решение такой задачи, то неустойчивость состояния (1) будет означать существование решения u , отличного от u_0 . Чтобы убедиться в этом, достаточно построить решение $u_1 = u - u_0 \neq 0$, удовлетворяющее нулевым условиям (6).

Частное решение задачи ищем в виде

$$u(x, z) = f(\gamma z) \sin \gamma x, \quad (7)$$

$$v(x, z) = g(\gamma z) \cos \gamma x,$$

где $\gamma = \pi k/L$, k — целый положительный параметр. Выясним, при каких ограничениях на f , g и k (7) удовлетворяет (4) и (5). Подставляя (7) в (4) и исключая функцию f , находим уравнение для g ($\xi \equiv \gamma z$):

$$g''' + \varepsilon g'' - (2 + \omega) g' + \varepsilon \theta g' + (1 + \Delta)(1 + \varepsilon^2) g + \varepsilon (1 + \Delta) \zeta \left[\left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right) g'' - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_4}\right) g \right] = 0, \quad (8)$$

при выводе которого пренебрегли членами, содержащими p^2 и pp' , и ввели обозначения

$$\zeta_0 = \gamma h, \quad \varepsilon = \frac{p_0}{\lambda_1 \zeta_0}, \quad 2 + \omega = \frac{\lambda_1 \lambda_3 - 2\lambda_2 \lambda_4 - \lambda_3^2}{\lambda_3 \lambda_4}, \quad (9)$$

$$\theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \left(2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{(\lambda_2 + \lambda_4)^2}{\lambda_1 \lambda_4} \right), \quad 1 + \Delta = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

такие, чтобы для пластины с симметрией кубической кристаллической системы $\Delta = 0$, а для изотропной обращалась в нуль и ω .

Последние два члена в (8) содержат переменную ζ , но коэффициенты при них — порядка $p_0/\lambda_1 \ll 1$. Поэтому приближенное решение уравнения ищем в виде $g = g_0 + g_1$, где g_0 — общее решение уравнения без указанных членов, а g_1 — частное решение получающегося неоднородного уравнения. g находим в виде

$$g(\zeta) = \sum_{i=1}^4 B_i e^{\alpha_i \zeta} [1 + d_i \zeta (\zeta - c_i)]. \quad (10)$$

Здесь B_i — постоянные, α_i — корни характеристического уравнения

$$\alpha^4 + \varepsilon \alpha^3 - (2 + \omega) \alpha^2 + \varepsilon \theta \alpha + (1 + \Delta)(1 + \varepsilon^2) = 0,$$

$$c_i = \frac{4\alpha_i^2 - 2 - \omega}{\alpha_i (2\alpha_i^2 - 2 - \omega)}, \quad d_i = \frac{p_0 [\lambda_1 + \lambda_4 - \alpha_i^2 (\lambda_3 + \lambda_4)]}{4\lambda_3 \lambda_4 \zeta_0 \alpha_i (2\alpha_i^2 - 2 - \omega)}. \quad (11)$$

По функции g легко восстанавливается f . Подставляя затем найденные функции в граничные условия (5), получаем систему четырех линейных однородных уравнений. Условием существования нетривиального решения системы является равенство нулю ее определителя. Корни получающегося уравнения определяют искомую зависимость значений параметра k (и, следовательно, полудлины волны возмущения $\Lambda = L/k$) от давления и упругих модулей.

В общем случае характеристический определитель есть трансцендентное выражение, коэффициентами при экспонентах которого являются полиномы восьмой степени. Аналитическое нахождение его корней затруднительно. Однако легко указать вид корней при $\zeta_0 \gg 1$, когда определитель четвертого порядка разбивается на произведение определителей второго порядка. Представляя корни определителя в виде $\zeta_0 = \xi + \eta$ ($\xi \gg \eta$), находим

$$\xi_{1,2} = - \frac{4\lambda_3 \lambda_4 \alpha_{1,2} (\alpha_{1,2}^2 - 2 - \omega)}{p_0 [\lambda_1 + \lambda_4 - \alpha_{1,2}^2 (\lambda_3 + \lambda_4)]}. \quad (12)$$

Считая, что $|\xi_1 - \xi_2|$ — порядка $\xi_{1,2}$, получаем

$$\eta_{1,2} = \left\{ (\lambda_3 \alpha_{2,1}^2 + \lambda_2) \left[\lambda_3 (2 - \alpha_{1,2} c_{1,2}) - \frac{\lambda_2}{\alpha_{1,2}} \left(c_{1,2} + \frac{2}{\alpha_{1,2}} \right) \right] - \left(\lambda_3 \alpha_{2,1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_{2,1}} \right) \right\} \lambda_3 \alpha_{1,2} (4 - \alpha_{1,2} c_{1,2}) - \lambda_2 c_{1,2} +$$

$$+ 4\lambda_3 (\lambda_2 + \lambda_4) (a_{1,2}^2 - 2 - \omega) / [\lambda_1 + \lambda_4 - a_{1,2}^2 (\lambda_3 + \lambda_4)] \Big\} \times \quad (13)$$

$$\times \left[2 (\lambda_3 a_{1,2}^2 + \lambda_2) \left(\lambda_3 a_{2,1} + \frac{\lambda_2}{a_{2,1}} \right) - \left(\lambda_3 a_{1,2} + \frac{\lambda_2}{a_{1,2}} \right) (\lambda_3 a_{2,1}^2 + \lambda_2) \right]^{-1}$$

(и аналогично для $a_{3,4}$, имеющих противоположный знак).

Нас интересуют действительные значения корней ζ_0 , поэтому следует отдельно рассмотреть случай, когда среди α_i есть комплексные. Если ограничиться главными членами, соответствующими формуле (12), то можно показать, что условие равенства нулю определителя второго порядка приводит к уравнению

$$(1 + \xi \operatorname{Re} d)^2 + \xi^2 (\operatorname{Im} d)^2 = 0,$$

которое имеет корни лишь при $\operatorname{Im} d = 0$. Оказывается, что для материала пластины с ромбической симметрией $\operatorname{Im} d \neq 0$. Но если $\omega < -2 \times \times \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} \right)$, то $\operatorname{Re} \alpha = 0$, и определитель четвертого порядка не распадается на произведение определителей второго порядка. Тогда вопрос о существовании корней $\zeta_0 \gg 1$ должен решаться численно. Для кубических кристаллов при $\omega > -4 \operatorname{Im} d = 0$, и правые части (12) и (13) являются действительными.

Вне рассмотренной области решение искалось в виде

$$\zeta_0 = \frac{p_0}{\lambda_1} \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, p_0).$$

Поведение функции Ψ для некоторых кубических кристаллов определялось численными методами. Результаты расчета представлены на графике зависимости ζ_0 от p_0/λ_1 (рис. 2).

Полученные результаты свидетельствуют о наличии двух ветвей решения, различающихся своей зависимостью от напряжения. Для одной из них длина полуволны Λ пропорциональна p_0 , $\Lambda \sim p_0 h / \lambda_1$. Эта ветвь описывает мелкую рябь ($\Lambda \ll h$) на поверхности образца. Наличие нескольких решений для Λ соответствует наложению волнистостей с различной длиной волны. Большему уровню напряжений отвечает большая длина волны искривления поверхности. Интересно, что решения такого типа возникают как при $p_0 > 0$ (сжатие), так и при $p_0 < 0$ (растяжение). В изотропном случае ветвь отсутствует. Если сопоставить (12) наблюдаемым бороздкам на изломах и поверхностной волнистости, то объясняются описанные свойства последних.

Вторая ветвь решения ведет себя существенно иначе. Длина полуволны возмущения уменьшается с возрастанием p_0 . Такое поведение решения

Таблица

Кристалл	Cu	LiCl	LiF	NaCl	KBr	RbCl
$\frac{\omega^2}{4} + \omega$	-0,96	-0,91	-0,7	1,4	8,9	11

характерно для задач механической устойчивости. Критическое значение напряжения определяется условием $\Lambda = L$.

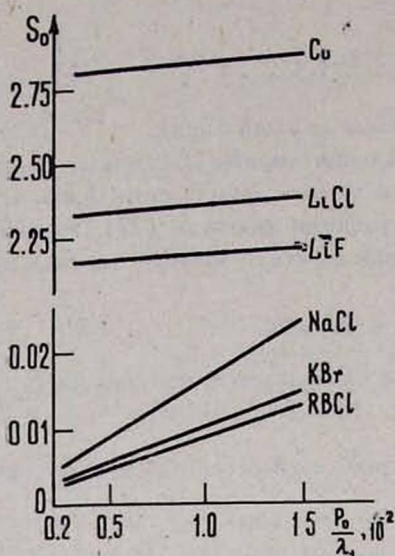


Рис. 2.

Сравним поведение функции ψ для различных кубических кристаллов со значениями параметра анизотропии ω , представленными в таблице. Видно, что устойчивость монокристаллов к возникновению деформационного рельефа типа гофров должна повышаться с увеличением ω . На кристаллах, например, меди, фторида лития появление рельефа следует ожидать при однократном сжатии. На не очень длинных и тонких образцах хлоридов калия, рубидия и т. д. рельеф должен появиться лишь при переходе в неупругую или даже пластическую область. Разумеется, приведенные результаты могут претендовать при упруго-пластической деформации только на качественное согласие с экспериментом.

В работе [15] наблюдался волнообразный рельеф на образцах из меди при однократном сжатии, что согласуется с вышеизложенным. Однако в [5] рельеф появлялся на кристаллах бромида калия уже при нескольких циклах нагружения. Возможно, что это объясняется значительным числом примесей в использованных образцах. Поэтому было бы желательно не только изучать рельеф, но и одновременно определять упругие модули. Тогда можно будет сделать заключение о соответствии приведенных результатов с опытом.

Возникновение рельефа сопровождается перераспределением поля напряжений: если во впадинах рельефа напряжение возрастает, то в поднятиях уменьшается. В соответствии с термофлуктуационным механизмом разрушения [14] вероятность разрыва межатомной связи пропорциональна $e^{-\frac{\omega}{kT}}$, где ω — упругая энергия, kT — тепловая. Поэтому субмикроскопические трещины преимущественно возникают во впадинах рельефа.

Микроскопическая трещина должна тогда распространяться путем соединения субмикроскопических трещин вдоль впадин рельефа.

В настоящей работе деформационный рельеф рассматривается как проявление потери механической устойчивости нагруженных кристаллов. Возникновение рельефа носит при таком подходе упругий характер. После снятия нагрузки рельеф должен исчезать, если его амплитуда $A \simeq |g(\zeta_0)|$ удовлетворяет неравенству $A \lesssim \frac{\Lambda}{\pi} \left(\epsilon - \frac{|p_0|}{\lambda_1} \right)$, где ϵ — предел упругости материала. При больших амплитудах искривления поверхности появляются пластически-деформированные области, «запоминающие» рельеф.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старый И. Б., Ханонкин А. А. Журнал прикл. механ. и техн. физики, № 2, 87 (1966).
2. Моисеев Л. М., Ханонкин А. А. ДАН УССР, А 7, 659 (1971).
3. Моисеев Л. М., Старый И. Б., Ханонкин А. А. ФММ, 27, 760 (1969).
4. Зазян З. Ф., Ковалев Ю. В., Ханонкин А. А. Изв. АН АрмССР, Физика, 11, 204 (1976).
5. Зазян З. Ф. и др. Изв. АН АрмССР, Физика, 11, 500 (1976).
6. McLean D. J. Inst. Metals, 80, 507 (1952).
7. Laird C., Smith G. C. Phil. Mag., 7, 847 (1962).
8. Крюсгар Ш. и др. В сб. Атомный механизм разрушения, М., 1963.
9. Коцань С. Усталостное разрушение металлов, М., 1976.
10. Нудельман Я. Л., Эрлих Л. Б. ДАН СССР, 85, 971 (1952).
11. Эрлих Л. Б. Вестник машиностроения, № 1, 26 (1963).
12. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости, М., 1948.
13. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961.
14. Ретель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. УФН, 106, 193 (1972).
15. Wet C. T., Parthasarathi M. N., Beck P. A. J. Appl. Phys., 28, 874 (1957).

ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ԱՌԱՋԱՅՈՂ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻՈՆ ՌԵԼԻԵՖԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Մ. ԱԴԱՄՅԱՆ, Ս. Լ. ՍՄՈԼՅԱՐ, Ա. Ա. ԽԱՆՈՆԿԻՆ

Աշխատանքում ծալքային ռելիեֆի մի բանի տեսակներ, որոնք առաջանում են բյուրեղային թիթեղի մակերևույթի վրա տարրեր եղանակով բեռնավորում կատարելիս, դիտվում են որպես նրա մեխանիկական ամրությունը կորցնելու նախապայման: Հաստատուն գրադիենտ ունեցող բեռնավորման ենթարկված օրոտարոպ թիթեղի մակերևույթի վրա ստացվում է երկու ճյուղով ռելիեֆ՝ փորմաներազույն ծիւնքի և պարբերաբար ծալքերի տեսքով, որոնց երկարությունները թիթեղի հաստության կարգի մեծություններ են:

ON THE DEFORMATION RELIEF ON CRYSTAL SURFACES

V. M. ADAMYAN, S. L. SMOLYAR, A. A. KHANONKIN

Some kinds of periodic folded relief, occurring on crystal surfaces under various loading conditions, are considered as the manifestation of elastic instability. On the example of orthotropic plate under the action of loading with constant gradient, the existence of two solutions to the problem of elastic instability was shown, the first solution describing small ripples on the surface and the second one corresponding to folds with the period of the order of plate thickness.