

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДИСЛОКАЦИОННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ
В ГЕКСАГОНАЛЬНОМ БИСЛОЕ

А. А. ХЗАРДЖЯН

В проблеме создания твердых тел с заданными физическими свойствами особое место занимает изучение композитных материалов. При этом физические свойства композитов существенно зависят от наличия различного рода дефектов внутри их компонент. Элементарным композитом является бислой — система, состоящая из двух слоев. В работе [1] рассмотрен бислой, состоящий из двух изотропных слоев, когда в одном из слоев находится дислокационное образование.

В настоящей работе рассматривается анизотропный бислой, состоящий из двух пластин гексагональной симметрии, причем пластина с упругими постоянными $c_{\alpha\beta}^{(1)}$ занимает область $[-\infty < x_1, x_2 < +\infty; -h_2 \leq x_3 \leq +h_1]$, а пластина с упругими постоянными $c_{\alpha\beta}^{(2)}$ — область $[-\infty < x_1, x_2 < +\infty; -h_3 \leq x_3 \leq -h_2]$. На плоскости $x_3 = 0$, параллельной поверхности бислоя, лежит дислокационное образование; боковые границы бислоя свободны. Необходимо найти напряженно-деформированное состояние системы.

Для решения задачи удобно построить, как и в [1], три вспомогательные краевые задачи.

1. Пусть $U_2 \equiv 0$, $\partial/\partial x_2 \equiv 0$,

$$\tau_{13} = \sigma_{33} = 0 \text{ при } x_3 = -h_3; +h_1,$$

$$\tau_{13}(x_1, +0) = \tau_{13}(x_1, -0), \quad \sigma_{33}(x_1, +0) = \sigma_{33}(x_1, -0),$$

$$\sigma_{13}(x_1, -h_2+0) = \sigma_{13}(x_1, -h_2-0), \quad \sigma_{33}(x_1, -h_2+0) = \sigma_{33}(x_1, -h_2-0),$$

$$U_\lambda(x_1, -h_2+0) = U_\lambda(x_1, -h_2-0), \quad U_\tau(x_1, -h_2+0) = U_\tau(x_1, -h_2-0)$$

$$U_\lambda(x_1, +0) = U_\lambda(x_1, -0), \quad (1)$$

$$U_\tau(x_1, +0) = i^{(s)} \cos mx_1, \quad U_\tau(x_1, -0) = (i^{(s)} - 1) \cos mx_1,$$

причем для первой вспомогательной краевой задачи $\gamma = 3$, $\lambda = 1$, а для второй $\gamma = 1$, $\lambda = 3$.

Если искать решение уравнения равновесия теории упругости, удовлетворяющее краевой задаче (1), в виде

$$U_\tau = \cos mx_1 \cdot f_\tau(x_3),$$

$$U_\lambda = \sin mx_1 \cdot f_\lambda(x_3),$$

то для параметров упругого поля найдем

$$U_i^{(s)} = \begin{Bmatrix} \sin mx_1 \\ \cos mx_1 \end{Bmatrix} \sum_{l=1}^4 P_l^{(s)} \exp(m k_{lj} x_3),$$

$$U_3^{(s)} = \left\{ \begin{array}{l} \cos m x_1 \\ -\sin m x_1 \end{array} \right\} \sum_{i=1}^4 k_{ij} (b_{4j} + k_{ij}^2 b_{3j}) P_i^{(s)} \exp(m k_{ij} x_3),$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = M_1^{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \cos m x_1 \\ -\sin m x_1 \end{array} \right\}, \quad \sigma_{13}^{(s)} = M_2^{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \sin m x_1 \\ \cos m x_1 \end{array} \right\},$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = M_3^{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \cos m x_1 \\ -\sin m x_1 \end{array} \right\}, \quad \sigma_{22}^{(s)} = M_4^{(s)} \left\{ \begin{array}{l} \cos m x_1 \\ -\sin m x_1 \end{array} \right\},$$

где

$$M_1^{(s)} = m \sum_{i=1}^4 [c_{11}^{(j)} + c_{13}^{(j)} k_{ij}^2 (b_{4j} + k_{ij}^2 b_{3j})] P_i^{(s)} \exp(m k_{ij} x_3),$$

$$M_2^{(s)} = m c_{55}^{(j)} \sum_{i=1}^4 k_{ij} (1 - b_{4j} - k_{ij}^2 b_{3j}) P_i^{(s)} \exp(m k_{ij} x_3),$$

$$M_3^{(s)} = m \sum_{i=1}^4 [c_{13}^{(j)} + c_{33}^{(j)} k_{ij}^2 (b_{4j} + k_{ij}^2 b_{3j})] P_i^{(s)} \exp(m k_{ij} x_3),$$

$$M_4^{(s)} = m \sum_{i=1}^4 [c_{12}^{(j)} + c_{13}^{(j)} k_{ij}^2 (b_{4j} + k_{ij}^2 b_{3j})] P_i^{(s)} \exp(m k_{ij} x_3),$$

$$k_{1j} = -k_{3j} = -\sqrt{-\frac{b_{1j}}{2} - \sqrt{\frac{b_{1j}^2}{4} - b_{2j}}},$$

$$k_{2j} = -k_{4j} = -\sqrt{-\frac{b_{1j}}{2} + \sqrt{\frac{b_{1j}^2}{4} - b_{2j}}},$$

$$b_{1j} = [c_{13}^{(j)} (c_{13}^{(j)} + 2c_{55}^{(j)}) - c_{11}^{(j)} c_{33}^{(j)}] / [c_{33}^{(j)} c_{55}^{(j)}], \quad b_{2j} = c_{11}^{(j)} / c_{33}^{(j)},$$

$$b_{3j} = c_{33}^{(j)} / [c_{13}^{(j)} + c_{55}^{(j)}], \quad b_{4j} = [(c_{13}^{(j)} + c_{55}^{(j)})^2 - c_{11}^{(j)} c_{33}^{(j)}] / [c_{55}^{(j)} (c_{13}^{(j)} + c_{55}^{(j)})],$$

$$P_i^{(s)} = \begin{cases} A_i^{(s)} & \text{при } 0 \leq x_3 \leq +h_1 \\ B_i^{(s)} & \text{при } -h_2 \leq x_3 < 0 \\ C_i^{(s)} & \text{при } -h_3 \leq x_3 < -h_2, \end{cases} \quad j = \begin{cases} 1 & \text{при } -h_2 \leq x_3 \leq +h_1 \\ 2 & \text{при } -h_3 \leq x_3 < -h_2, \end{cases}$$

m — действительное число.

В выражениях $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ в (2) верхняя строка соответствует первой вспомогательной краевой задаче ($s = 1$), а нижняя — второй ($s = 2$). Коэффициенты $P_i^{(s)}$ и $t_i^{(s)}$ находятся посредством решения соответствующей системы из тринадцати линейных уравнений (1) для каждой из двух вспомогательных краевых задач.

2. Третья вспомогательная краевая задача (антиплоская деформация).

Пусть $U_1 \equiv U_3 \equiv 0, \quad \partial/\partial x_2 \equiv 0,$

$$U_2(x_1, +0) = \mu \cos m x_1, \quad U_2(x_1, -0) = (\mu - 1) \cos m x_1,$$

$$\sigma_{23}(x_1, +0) = \sigma_{23}(x_1, -0), \quad \sigma_{23}(x_1, -h_3) = \sigma_{23}(x_1, +h_1) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{23}(x_1, -h_2 + 0) = \sigma_{23}(x_1, -h_2 - 0), \quad U_2(x_1, -h_2 + 0) = U_2(x_1, -h_2 - 0).$$

Если искать решение уравнения равновесия, удовлетворяющее закону Гука и краевой задаче (3), в виде

$$U_2(x_1, x_3) = \cos mx_1 \cdot f_2(x_3),$$

то для параметров упругого поля получим

$$U_2^{(3)} = \cos mx_1 \sum_{i=1}^2 P_i^{(3)} \exp(m\omega_{ij} x_3),$$

$$\sigma_{12}^{(3)} = M_5^{(3)} \sin mx_1, \quad \sigma_{23}^{(3)} = M_6^{(3)} \cos mx_1, \quad (4)$$

где

$$M_5^{(3)} = -m c_{55}^{(j)} \sum_{i=1}^2 P_i^{(3)} \exp(m\omega_{ij} x_3),$$

$$M_6^{(3)} = m c_{55}^{(j)} \sum_{i=1}^2 \omega_{ij} P_i^{(3)} \exp(m\omega_{ij} x_3),$$

$$\omega_{1j} = -\omega_{2j} = -\sqrt{c_{55}^{(j)}/c_{55}^{(j)}}.$$

Коэффициенты $P_i^{(3)}$ и μ находятся путем решения системы из семи линейных уравнений (3).

Поле напряжений круговой дислокационной петли в гексагональном бислое

Рассмотрим решение задачи для круговой дислокационной петли радиуса a с произвольным вектором Бюргерса, лежащей в плоскости $x_3 = 0$, параллельной поверхности пластины. Введем цилиндрическую систему координат (r, α, x_3) , начало которой, как и начало декартовой системы, находится в центре петли, а ось x_3 перпендикулярна к поверхности пластины. Не нарушая общности, направим ось x_1 декартовой системы координат вдоль компоненты $b_{\parallel}$ вектора Бюргерса, параллельной плоскости залегания петли. Тогда для компонент упругого поля напряжений краевой дислокационной петли с помощью (2) получаем

$$\sigma_{11} = ab_{\perp} [F_1^{(1)} \cos \alpha + F_3^{(1)} \sin^2 \alpha - (F_2^{(1)} - F_4^{(1)}) \cos 2\alpha],$$

$$\sigma_{12} = \frac{ab_{\perp}}{2} [F_1^{(1)} - F_3^{(1)} - 2(F_2^{(1)} - F_4^{(1)})] \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_{13} = ab_{\perp} F_0^{(1)} \cos \alpha, \quad \sigma_{23} = -ab_{\perp} F_0^{(1)} \sin \alpha,$$

$$\sigma_{22} = ab_{\perp} [F_1^{(1)} \sin^2 \alpha + F_3^{(1)} \cos^2 \alpha + (F_2^{(1)} - F_4^{(1)}) \cos 2\alpha],$$

$$\sigma_{33} = ab_{\perp} F_5^{(1)}, \quad (5)$$

где

$$F_0^{(1)} = \int_0^{\infty} M_2^{(1)} J_1(ma) J_1(mr) dm, \quad F_1^{(1)} = \int_0^{\infty} M_1^{(1)} J_1(ma) J_0(mr) dm,$$

$$F_2^{(1)} = \int_0^{\infty} M_1^{(1)} \frac{J_1(ma) J_1(mr)}{mr} dm, \quad F_3^{(1)} = \int_0^{\infty} M_4^{(1)} J_1(ma) J_0(mr) dm,$$

$$F_4^{(1)} = \int_0^{\infty} M_4^{(1)} \frac{J_1(ma) J_1(mr)}{mr} dm, \quad F_5^{(1)} = \int_0^{\infty} M_5^{(1)} J_1(ma) J_0(mr) dm,$$

$b_{\perp}$ — компонента вектора Бюргерса, перпендикулярная к поверхности залегания петли, J_0 и J_1 — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков.

Используя (2) и (4), для компонент упругого поля напряжений скользящей дислокационной петли получим

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= -\frac{ab_{\perp}}{4} [(3F_1^{(2)} + F_3^{(2)} - 2F_5^{(2)}) \cos \alpha - (F_2^{(2)} - F_4^{(2)} + 2F_6^{(2)}) \cos 3\alpha], \\ \sigma_{12} &= -\frac{ab_{\perp}}{4} [(F_1^{(2)} - F_3^{(2)} - 2F_5^{(2)}) \sin \alpha - (F_2^{(2)} - F_4^{(2)} + 2F_6^{(2)}) \sin 3\alpha], \\ \sigma_{13} &= \frac{ab_{\parallel}}{2} [F_7^{(2)} + F_9^{(2)} - (F_8^{(2)} - F_{10}^{(2)}) \cos \alpha], \\ \sigma_{22} &= -\frac{ab_{\perp}}{4} [(F_1^{(2)} + 3F_3^{(2)} + 2F_5^{(2)}) \cos \alpha + (F_2^{(2)} - F_4^{(2)} + 2F_6^{(2)}) \cos 3\alpha], \\ \sigma_{23} &= -\frac{ab_{\parallel}}{2} (F_8^{(2)} - F_{10}^{(2)}) \sin 2\alpha, \\ \sigma_{33} &= -ab_{\parallel} F_{11}^{(2)} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_1^{(2)} J_1(ma) J_1(mr) dm, & F_2^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_1^{(2)} J_1(ma) J_3(mr) dm, \\ F_3^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_4^{(2)} J_1(ma) J_1(mr) dm, & F_4^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_4^{(2)} J_1(ma) J_3(mr) dm, \\ F_5^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_5^{(3)} J_1(ma) J_1(mr) dm, & F_6^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_5^{(3)} J_1(ma) J_3(mr) dm, \\ F_7^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_2^{(2)} J_1(ma) J_0(mr) dm, & F_8^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_2^{(2)} J_1(ma) J_2(mr) dm, \\ F_9^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_6^{(3)} J_1(ma) J_0(mr) dm, & F_{10}^{(2)} &= \int_0^{\infty} M_6^{(3)} J_1(ma) J_2(mr) dm, \\ F_{11}^{(2)} &= \int_0^8 M_3^{(2)} J_1(ma) J_1(mr) dm. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить выражения для полей напряжений дислокационных петель произвольной формы в бислое с гексагональной симметрией.

Поле напряжений прямолинейных дислокаций в гексагональном бислое

С помощью выражений (5) и (6) можно найти поля напряжений прямолинейных дислокаций, расположенных на любой поверхности, параллельной поверхности бислоя. Для этого достаточно перенести систему координат из центра петли на линию дислокации и в полученных выражениях совершить предельный переход при $a \rightarrow \infty$.

Так, например, для краевой прямолинейной дислокации, параллельной оси x_1 , плоскость скольжения которой перпендикулярна к поверхности бислоя, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{b_{x_2}}{\pi} \int_0^\infty M_4^{(1)} \sin mx_2 \frac{dm}{m}, \quad \sigma_{22} = -\frac{b_{x_2}}{\pi} \int_0^\infty M_1^{(1)} \sin mx_2 \frac{dm}{m}, \\ \sigma_{23} &= -\frac{b_{x_2}}{\pi} \int_0^\infty M_2^{(1)} \cos mx_2 \frac{dm}{m}, \quad \sigma_{33} = -\frac{b_{x_2}}{\pi} \int_0^\infty M_3^{(1)} \sin mx_2 \frac{dm}{m}, \quad (7) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{13} = 0.\end{aligned}$$

Аналогичным образом для краевой прямолинейной дислокации, параллельной оси x_1 , плоскость скольжения которой параллельна поверхности бислоя, находим

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{b_{x_1}}{\pi} \int_0^\infty M_4^{(2)} \cos mx_2 \frac{dm}{m}, \quad \sigma_{22} = -\frac{b_{x_1}}{\pi} \int_0^\infty M_1^{(2)} \cos mx_2 \frac{dm}{m}, \\ \sigma_{23} &= -\frac{b_{x_1}}{\pi} \int_0^\infty M_2^{(2)} \sin mx_2 \frac{dm}{m}, \quad \sigma_{33} = -\frac{b_{x_1}}{\pi} \int_0^\infty M_3^{(2)} \cos mx_2 \frac{dm}{m}, \quad (8) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{13} = 0.\end{aligned}$$

Для компонент поля напряжений винтовой дислокации, параллельной оси x_1 , получаем

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \frac{b_{x_1}}{\pi} \int_0^\infty M_5^{(3)} \cos mx_2 \frac{dm}{m}, \quad \tau_{13} = -\frac{b_{x_1}}{\pi} \int_0^\infty M_6^{(3)} \sin mx_2 \frac{dm}{m}, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0.\end{aligned} \quad (9)$$

Комбинируя (7), (8) и (9), можно найти поля напряжений прямолинейных дислокаций (с произвольными векторами Бюргерса) в гексагональном бислое, а также поля напряжений любых дислокационных образований, составленных из прямолинейных дислокаций и лежащих на любой поверхности, параллельной поверхности бислоя.

МГУ им. Ломоносова

Поступила 3.VII.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Хзарджян С. М. Докторская диссертация, МИЭМ, Москва, 1978.

Ա. Ա. ԽԶԱՐԶՅԱՆ

Աշխատանքում ստացված են ընդհանուր լուծումներ դիսլոկացիոն կազմավորումների լարումների դաշտերի համար: Ենթադրվում է, որ այդ կազմավորումների Բյուրգերսի վեկտորները կարող են գտնվել հեկսագոնալ բյուրեղի բազիսային հարթության վրա: Ընդհանուր լուծումը ներկայացված է երեք օժանդակ եզրային խնդիրների մասնավոր լուծումների գումարի տեսքով: Դիտարկված է այն դեպքը, երբ խզման մակերևույթը ունի շրջանի ձև: Ստացված են նաև արտահայտություններ ուղղաձիգ եզրային և պտտականային դիսլոկացիաների լարումների դաշտերի համար:

STRESS FIELDS OF DISLOCATION CONFIGURATIONS IN A HEXAGONAL BILAYER

A. A. KHZARDZHYAN

General solutions are obtained for stress fields of dislocation configurations with arbitrary Burgers vectors lying on a surface parallel to that of two plate bilayer, cut along the basal plane of a hexagonal crystal. The solution is represented as a sum of particular solutions of three auxiliary bound-value problems. As a specific case the circular surface of dislocation is considered. Using the stress field of a circular dislocation loop, the stress fields of rectilinear, edge and screw dislocations parallel to the x_1 axis are obtained.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 17, 334—338 (1982)

ПОЛОСЫ СМЕЩЕНИЯ ПРИ ДВУХВОЛНОВОМ РАССЕЯНИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

П. А. БЕЗИРГАНЯН, Г. Г. АВЕТИСЯН

Полосы смещения рентгеноинтерференционных картин являются одной из разновидностей рентгеновских интерференционных муаровых картин. Исследование этих картин имеет важное как теоретическое, так и практическое значение.

В оптике для получения муаровых картин пользуются пучками, имеющими распределения интенсивности по их поперечным сечениям, вернее пучок пропускают последовательно через две сетки, отличающиеся или периодами, или направлениями. Полученная картина не зависит от длины волны, но зависит от периодов и направлений сеток: полученные муаровые картины являются неинтерференционными. Образование рентгеновского муара можно объяснить с помощью распределения фаз по поперечным сечениям налагаемых пучков — они имеют интерференционный характер. Однако образование рентгеновского муара иногда полукачественно можно объяснить и с помощью распределений интенсивностей по поперечным сечениям пучков.