

Следовательно, при исследовании кулоновского взаимодействия в периодических полупроводниковых структурах анизотропные явления могут наблюдаться только в том случае, когда диэлектрические проницаемости чередующихся слоев заметно отличаются друг от друга.

НИИ физики конденсированных
сред ЕГУ

Поступила 16. VI. 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытова Н. С. Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 3, 30 (1967).
2. Чаплик А. В., Энтин М. В. ЖЭТФ, 61, 2496 (1971).
3. Келдыш Л. В. Письма ЖЭТФ, 29, 716 (1979).
4. Ильченко Л. Г., Пашицкий Э. А. ФТТ, 22, 3395 (1980).
5. Арутюнян Г. М., Неркарарян Х. В. ФТТ, 23, 225 (1981).
6. Vlascher P. B., Falicov L. M. Phys. Rev., B3, 2541 (1971).
7. Шук А. Я. ФТП, 8, 1841 (1974).
8. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике, Изд. Наукова думка, Киев, 1971.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. Наука, М., 1971.

ԿԵՏԱՅԻՆ ԼԻՅՔԻ ԷԿՐԱՆԱՑՎԱԾ ՊՈՏԵՆՑԻԱԸ ԳԵՐՑԱՆՑՈՒՄ

Գ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Խ. Վ. ՆԵՐԿԱՐԱՐՅԱՆ

Փոխադրեցության երկրաչափությունը ապահովող պարամետրում հետազոտված է լեքերի էկրանացված կուլոնյան փոխադրեցությունը պարբերական կիսահաղորդչային կառուցվածքում, որը երկու կողմերից սահմանափակված է դիէլեկտրիկներով: Որոշված է էկրանացման շտապի կախվածությունը հաղորդչի շերտերի պարամետրերից և նրանց թվից:

SCREENED POTENTIAL OF A POINT-CHARGE IN SUPERLATTICE

G. M. HARUTYUNYAN, Ch. V. NERKARARYAN

In the Thomas-Fermi approximation the screened Coulomb interaction of charges was studied in periodic semiconductor structures, the superlattices, bounded on both the sides with dielectrics. The dependence of screening radius on the parameters of alternating layers and their number along the superlattice axis and in the crosswise direction was determined.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 17, 67—79 (1982)

КОГЕРЕНТНОСТЬ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ РЕНТГЕНОВСКОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. П. БЕЗИРГАНЯН

В работе [1] обсуждался вопрос однородности цугов рентгеновского характеристического излучения по структуре. Был сделан вывод об идентичности цугов такого излучения. В работе отмечалось, что в случае точеч-

ного источника (излучение одного атома) имеет место полная пространственная когерентность и, следовательно, необходимо учитывать лишь временную частичную когерентность. В работе были рассмотрены также условия, налагаемые на размеры рентгеновского характеристического источника, содержащего множество атомных излучателей, а также на геометрию опыта, при выполнении которых можно учитывать лишь временную когерентность, пренебрегая при этом эффектами пространственной когерентности. Было показано, что в случае источника, удовлетворяющего этим условиям, интерференционная картина сохраняется и тогда, когда время запаздывания σ интерферирующих пучков превышает время излучения цуга τ .

В настоящей работе обсуждается когерентность характеристического излучения совокупности атомов с учетом их пространственного расположения.

Как известно [2, 3], абсолютная когерентность получается только в том случае, когда источник излучения точечный, процесс излучения непрерывный (время когерентности бесконечно большое) и излучение полностью поляризованное. Для реальных источников ни одно из этих условий не выполняется, поэтому необходимо исследовать рассеяние частично когерентного излучения. Влияние частичной когерентности при кинематическом и динамическом рассеяниях проявляется по-разному. Здесь мы будем исходить из приближений кинематической теории рассеяния рентгеновского характеристического излучения.

1. Исследуем в некоторой точке M интенсивность излучения, рассеянного кристаллом B , при его облучении рентгеновским источником конечных размеров (рис. 1). Пренебрежем пока эффектами поляризации и предположим, что все элементарные колебания, накладывающиеся в точке

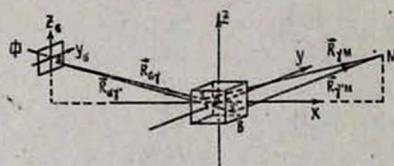


Рис. 1.

наблюдения M , имеют одинаковые направления. Введем обозначения: $R_{\sigma\gamma}$ — расстояние между атомом σ источника Φ и атомом γ кристаллического образца B , $R_{\gamma M}$ — расстояние между атомом γ кристалла B и точкой наблюдения M , τ_σ — начальный момент излучения атома σ источника.

Волна с амплитудой E , излученная атомом σ источника Φ и рассеянная атомом γ кристалла в сторону точки наблюдения M , будет иметь вид

$$A_{\sigma\gamma} = \frac{f_a E}{R_{\sigma\gamma} R_{\gamma M}} \exp \{ -i [\omega (t - \tau_\sigma) - \mathbf{k} (R_{\sigma\gamma} + R_{\gamma M})] \}, \quad (1)$$

где f_a — атомный фактор кристалла, т. е. выражение (1) записано в единицах амплитуды волны, рассеянной свободным (томпсоновским) электроном.

Для получения суммарной волны в точке наблюдения M , излученной всем источником и рассеянной кристаллом в целом, необходимо $A_{\sigma\gamma}$ про- суммировать по σ и γ :

$$A_M = \sum_{\sigma} \sum_{\gamma} A_{\sigma\gamma}. \quad (2)$$

Для мгновенного значения суммарной интенсивности в точке M получаем

$$|A_M|^2 = |f_a|^2 |E|^2 \left[\sum_{\sigma} \sum_{\gamma} (R_{\sigma\gamma} R_{\gamma M})^{-1} \exp [i(\tau_{\sigma} \omega + k(R_{\sigma\gamma} + R_{\gamma M}))] \right] \times \\ \times \left[\sum_{\sigma'} \sum_{\gamma'} (R_{\sigma'\gamma'} R_{\gamma' M})^{-1} \exp [-i(\tau_{\sigma'} \omega + k(R_{\sigma'\gamma'} + R_{\gamma' M}))] \right]. \quad (3)$$

Для удобства в выражении (3) опущены векторные знаки.

Чтобы получить значение наблюдаемой интенсивности, $|A_M|^2$ необходимо усреднить по времени:

$$J = \langle |A_M|^2 \rangle. \quad (4)$$

В последнем выражении содержатся произведения типа

$$\exp [i(\tau_{\sigma} \omega + k(R_{\sigma\gamma} + R_{\gamma M}))] \times \exp [-i(\tau_{\sigma'} \omega + k(R_{\sigma'\gamma'} + R_{\gamma' M}))],$$

и так как излучения различных атомов можно считать статистически независимыми, то произведения, для которых $\sigma \neq \sigma'$, при усреднении обращаются в нуль. Произведения же, в которых $\sigma = \sigma'$, есть

$$\exp [-ik[(R_{\sigma'\gamma'} + R_{\gamma' M}) - (R_{\sigma\gamma} + R_{\gamma M})]].$$

Таким образом, выражение (4) принимает вид

$$J = |f_a|^2 |E|^2 \sum_{\sigma} \sum_{\gamma} \sum_{\gamma'} (R_{\sigma\gamma} R_{\sigma'\gamma'} R_{\gamma M} R_{\gamma' M})^{-1} \exp [-ik[(R_{\sigma'\gamma'} + R_{\gamma' M}) - \\ - (R_{\sigma\gamma} + R_{\gamma M})]].$$

Не совершая большой ошибки, в знаменателе этого выражения величины $R_{\sigma\gamma}$ и $R_{\sigma'\gamma'}$ можно заменить средним расстоянием R_1 между кристаллом и источником, а величины $R_{\gamma M}$ и $R_{\gamma' M}$ — средним расстоянием R_2 между кристаллом и точкой наблюдения M . Тогда получим

$$J = C \sum_{\sigma} \sum_{\gamma} \sum_{\gamma'} \exp [-ik[(R_{\sigma'\gamma'} + R_{\gamma' M}) - (R_{\sigma\gamma} + R_{\gamma M})]], \quad (5)$$

где

$$C = |f_a|^2 |E|^2 (R_1 R_2)^{-2}. \quad (6)$$

Если $(x_{\Phi}, 0, z_{\Phi})$ есть координаты геометрического центра источника Φ в системе координат, связанной с кристаллом, $(x_M, 0, z_M)$ — координаты точки наблюдения M в той же системе, $(0, y_{\sigma}, z_{\sigma})$ — координаты элементарного источника σ в системе координат с началом в точке Φ и осями, параллельными соответствующим осям системы координат, связанной с кристаллом, то для $R_{\sigma\gamma}$, $R_{\sigma'\gamma'}$, $R_{\gamma M}$ и $R_{\gamma' M}$ можно записать следующие выражения (см. рис. 1):

$$R_{\sigma\gamma}^2 = (x_{\Phi} - x_{\gamma})^2 + (y_{\sigma} - y_{\gamma})^2 + (z_{\Phi} + z_{\sigma} - z_{\gamma})^2,$$

$$R_{\sigma'\gamma'}^2 = (x_{\Phi} - x_{\gamma'})^2 + (y_{\sigma} - y_{\gamma'})^2 + (z_{\Phi} + z_{\sigma} - z_{\gamma'})^2,$$

$$R_{\gamma M}^2 = (x_M - x_{\gamma})^2 + y_{\gamma}^2 + (z_M - z_{\gamma})^2,$$

$$R_{\gamma' M}^2 = (x_M - x_{\gamma'})^2 + y_{\gamma'}^2 + (z_M - z_{\gamma'})^2.$$

Как известно, кинематическое рассеяние рентгеновских лучей может происходить только в небольших кристаллах, размеры которых меньше, чем 10^{-4} см. Имея в виду малость величин x_{γ} , y_{γ} , z_{γ} , $x_{\gamma'}$, $y_{\gamma'}$ и $z_{\gamma'}$, предыдущие выражения запишем в виде

$$R_{z_{\gamma}} = R_1 + (R_1)^{-1} \left[\frac{1}{2} (y_{\sigma}^2 + z_{\sigma}^2) - x_{\phi} x_{\gamma} - y_{\sigma} y_{\gamma} + z_{\phi} z_{\sigma} - z_{\phi} z_{\gamma} - z_{\sigma} z_{\gamma} \right],$$

$$R_{z_{\gamma'}} = R_1 + (R_1)^{-1} \left[\frac{1}{2} (y_{\sigma}^2 + z_{\sigma}^2) - x_{\phi} x_{\gamma'} - y_{\sigma} y_{\gamma'} + z_{\phi} z_{\sigma} - z_{\phi} z_{\gamma'} - z_{\sigma} z_{\gamma'} \right],$$

$$R_{x_{\gamma M}} = R_2 - (R_2)^{-1} [x_{\gamma} x_M + z_{\gamma} z_M],$$

$$R_{x_{\gamma' M}} = R_2 - (R_2)^{-1} [x_{\gamma'} x_M + z_{\gamma'} z_M].$$

Тогда (5) примет вид

$$J = C \sum_{\sigma} \left\{ \sum_{\gamma} \exp \left\{ -ik \left[\left(\frac{x_{\phi}}{R_1} - \frac{x_M}{R_2} \right) x_{\gamma} + \frac{y_{\sigma}}{R_1} y_{\gamma} + \left(\frac{z_{\phi} + z_{\sigma}}{R_1} + \frac{z_M}{R_2} \right) z_{\gamma} \right] \right\} \sum_{\gamma'} \exp \left\{ ik \left[\left(\frac{x_{\phi}}{R_1} - \frac{x_M}{R_2} \right) x_{\gamma'} + \frac{y_{\sigma}}{R_1} y_{\gamma'} + \left(\frac{z_{\phi} + z_{\sigma}}{R_1} + \frac{z_M}{R_2} \right) z_{\gamma'} \right] \right\} \right\}. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$A_1 = \frac{x_{\phi}}{R_1} + \frac{x_M}{R_2}, \quad A_2 = \frac{y_{\sigma}}{R_1}, \quad A_3 = A_3' + A_3'',$$

$$A_3' = \frac{z_{\phi}}{R_1} + \frac{z_M}{R_2}, \quad A_3'' = \frac{z_{\sigma}}{R_1}, \quad (8)$$

$$x_{\gamma} = x_{1\gamma}, \quad y_{\gamma} = x_{2\gamma}, \quad z_{\gamma} = x_{3\gamma}, \quad x_{\gamma'} = m_i a_i, \quad x_{\gamma'} = m_i' a_i,$$

где a_i — трансляции решетки, m_i и m_i' — целые числа, $i = 1, 2, 3$.

Подстановка (8) в (7) дает

$$J = C \sum_{\sigma} \left\{ \prod_{i=1}^3 \left[\sum_{m_i=0}^{N_i-1} \exp(-ik A_i m_i a_i) \sum_{m_i'=0}^{N_i-1} \exp(ik A_i m_i' a_i) \right] \right\}, \quad (9)$$

где N_i — число атомов в направлении a_i . Произведя в выражении (9) суммирование по m_i и m_i' , получаем

$$J = C \sum_{\sigma} \left\{ \prod_{i=1}^3 \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N_i k A_i a_i \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k A_i a_i \right)} \right\}. \quad (10)$$

Так как первый множитель под знаком суммы не содержит членов, имеющих индекс σ (мы рассматриваем двумерный источник), то его можно вынести за знак суммы:

$$J = C \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k A_1 a_1\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k A_1 a_1\right)} \sum_{\sigma} \left\{ \prod_{i=2}^3 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_i k A_i a_i\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k A_i a_i\right)} \right\}. \quad (11)$$

Заметим, что подстановкой в (11) значений $y_{\sigma} = z_{\sigma} \equiv 0$ (т. е. пренебрегая размерами источника) можно получить выражение для средней интенсивности без учета эффектов пространственной частичной когерентности:

$$J = CN_{\sigma} N_2^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k A_1 a_1\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k A_1 a_1\right)} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_3 k A_3 a_3\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k A_3 a_3\right)}, \quad (12)$$

где N_{σ} — общее число атомов источника, излучающих в направлении кристалла.

Запишем выражение (11) в виде

$$J = CD_1 \sum_{\sigma} \left\{ \prod_{i=2}^3 D_i \right\}, \quad (13)$$

где

$$D_i = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_i k A_i a_i\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k A_i a_i\right)} \quad (i=1, 2, 3). \quad (14)$$

Как известно, максимальное отражение наблюдается при равенстве углов падения и отражения (симметричное отражение), т. е. при

$$A_1 = x_{\phi}/R_1 + x_M/R_2 = 0. \quad (15)$$

Из (8) и (14) видно, что D_3 принимает максимальное значение, когда

$$A_3 = z_{\phi}/R_1 + z_M/R_2 = m\lambda/a_3, \quad (16)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ (так как $A_3' > 0$ и $A_3' \gg A_3^*$). При $z_{\sigma} = 0$ имеем $A_3' = A_3$, и уравнение (16) переходит в следующее

$$A_3' = z_{\phi}/R_1 + z_M/R_2 = m\lambda/a_3. \quad (16a)$$

Нетрудно видеть, что последнее выражение представляет собой уравнение Вульфа—Брэгга при отражении от семейства плоскостей (x, y) с межплоскостным расстоянием a_3 . Действительно, по условию (15) углы между R_1 и осью x и R_2 и той же осью равны. Поэтому обозначая

$\frac{z_{\phi}}{R_1} = \frac{z_M}{R_2} = \sin \theta$, выражение (16a) преобразуем к виду

$$2 a_3 \sin \theta = m\lambda.$$

С учетом (16a) для максимального отражения выражение для D_3 будет иметь вид

$$D_3 = \frac{\sin^2 \left(N_3 \frac{z_3 k a_3}{2 R_1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{z_3 k a_3}{2 R_1} \right)}. \quad (17)$$

Таким образом, в случае, когда направление волны, излученной центральной точкой источника и падающей на центр кристаллического образца, удовлетворяет условию Вульфа—Брэгга (направление максимального отражения), выражение (13) принимает следующий вид:

$$J = CN_i^2 \sum_{\sigma} \left\{ \prod_{i=2}^3 \frac{\sin^2 \left(N_i \frac{k a_i x_{i\sigma}}{2 R_1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{k a_i x_{i\sigma}}{2 R_1} \right)} \right\}. \quad (18)$$

Так как рассматривается источник, имеющий прямоугольную форму, то заменив в (18) суммирование по σ интегрированием, находим

$$J = CN_i^2 \rho_0 \prod_{i=2}^3 \left\{ \int \frac{\sin^2 \left(N_i \frac{k a_i x_{i\sigma}}{2 R_1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{k a_i x_{i\sigma}}{2 R_1} \right)} dx_{i\sigma} \right\}, \quad (19)$$

где ρ_0 — число излучающих атомов на единичной площади источника.

Так как N_i — обычно большие числа, то, как это видно из выражения (19), при значениях аргумента подынтегральной функции, больших π/N_i , вкладом в интеграл последующих значений функции можно пренебречь. Пользуясь этим условием, найдем эффективные значения размеров источника, начиная с которых их дальнейшее увеличение не приводит к изменению интенсивности отраженных волн:

$$\frac{k a_i (x_{i\sigma})_{\text{эфф}}}{2 R_1} = \frac{\pi}{N_i} \quad \text{или} \quad (x_{i\sigma})_{\text{эфф}} = \frac{R_1 \lambda}{N_i a_i} \quad (i = 2, 3), \quad (20)$$

т. е. эффективные размеры источника обратно пропорциональны размерам кристалла в соответствующих направлениях.

Проинтегрируем (19), считая, что размеры источника больше соответствующих эффективных размеров или равны им, а также учитывая, что $N_i \sim 10^4$:

$$CN_i^2 \rho_0 \left(\frac{2 R_1}{k} \right)^2 \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{1}{a_i} \int \frac{\sin^2(N_i x_i)}{x_i^2} dx_i \right\} = CN_i^2 \rho_0 \frac{R_1^2 \lambda^2}{a_2 a_3} N_2 N_3. \quad (21)$$

Найдем теперь степень когерентности рассеянного излучения источника конечных размеров. С этой целью запишем (5) в следующем виде:

$$J = C(L_1 + L_2), \quad (22)$$

где

$$L_1 = N_1 N_2 N_3 N_s,$$

$$L_2 = \sum_{\sigma} \sum_{\tau \neq \sigma} \exp \{ -ik [(R_{\sigma\tau'} - R_{\sigma\tau}) + (R_{\tau'M} - R_{1M})] \},$$

L_1 зависит только от количества излучающих и рассеивающих атомов.
 L_2 — интерференционный член.

Степень когерентности рассеянного излучения источника в точке наблюдения есть

$$j \equiv C \frac{L_2}{J} = 1 - C \frac{L_1}{J}. \quad (23)$$

Для источника, размеры которого больше эффективных размеров или равны им, имеем

$$j = 1 - \frac{S}{N_1 R_1^2} \frac{a_2 a_3}{i^2}, \quad (24)$$

где $S = N_1 j_0$ — площадь источника.

Второй член в правой части (24) много меньше единицы и, следовательно, получается когерентность, близкая к полной. Это объясняется тем, что расчеты проведены с использованием (15) и (16а), т. е. для Вульф-Брэгговского направления отражения. С увеличением размеров источника излучение, исходящее от его периферийной части, не отражается от атомных плоскостей кристалла, так как нарушается условие Вульфа—Брэгга. Большая степень когерентности объясняется и тем, что расчеты проводились для кристаллов, имеющих малые размеры, и поэтому квадратами величин $x_{1\sigma}$ и $x_{1\sigma}'$ мы пренебрегли. Их учет привел бы к относительному снижению степени когерентности.

Рассмотрим теперь случай, имеющий важное практическое значение. Обычно для получения большой плотности первичного падающего пучка пользуются полосчатым (штриховым) источником, излучение которого берут в направлении полосы под малым углом α . Здесь мы по-прежнему будем рассматривать двумерный прямоугольный источник, поверхность которого перпендикулярна к плоскости (xz) и составляет угол α с плоскостью (xy) (рис. 2). Уравнение (18) будет иметь вид

$$J = C \sum_{\sigma} \left\{ \prod_{i=1}^3 \frac{\sin^2 \left(N_i \frac{1}{2R_1} k a_i x_{i\sigma} \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2R_1} k a_i x_{i\sigma} \right)} \right\}. \quad (25)$$

С учетом тех же приближений, что и при выводе выражения (21), а также следующих соотношений

$$x_{\sigma} \equiv x_{1\sigma} = l_{\sigma} \cos \alpha, \quad z_{\sigma} \equiv x_{3\sigma} = l_{\sigma} \sin \alpha, \quad (26)$$

где l_{σ} — координата элементарного источника σ , связанная с осью, проходящей вдоль линии пересечения поверхности источника с плоскостью (xz), в выражении (25) заменим суммирование интегрированием:

$$J = C j_0 \left(\frac{2R_1}{k} \right)^2 \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(N_2 x)}{x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(N_1 a_1 x \cos \alpha) \sin^2(N_3 a_3 x \sin \alpha)}{a_1^2 a_3^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha x^4} dx. \quad (27)$$

Второй интеграл в (27) есть

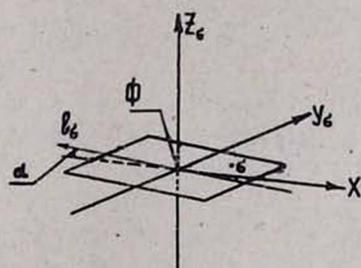


Рис. 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ax) \sin^2(bx)}{x^4} dx = \begin{cases} \pi a^2 b \left(1 - \frac{a}{3b}\right) & \text{при } 0 \leq a \leq b \\ \pi a b^2 \left(1 - \frac{b}{3a}\right) & \text{при } 0 \leq b \leq a, \end{cases} \quad (28)$$

и с его помощью из (27) получаем следующие результаты. При малых углах α , т. е. при полосчатом фокусе, для средней интенсивности в направлении максимального отражения имеем

$$J = C_{\rho_0} N_1 N_2 N_3^2 \frac{R_1^2 \lambda}{a_1 a_2 \cos \alpha} \left(1 - \frac{N_3 a_3}{3 N_1 a_1} \operatorname{tg} \alpha\right), \quad (30)$$

а при углах $\alpha \approx \pi/2$ —

$$J = C_{\rho_0} N_1^2 N_2 N_3 \frac{R_1^2 \lambda}{a_2 a_3 \sin \alpha} \left(1 - \frac{N_1 a_1}{3 N_3 a_3} \operatorname{ctg} \alpha\right). \quad (31)$$

2. В предыдущем пункте исследовалась зависимость интенсивности дифрагированных волн от эффективных размеров источника. Выражение (19) было проинтегрировано в бесконечных пределах, что соответствовало случаю, когда размеры источника больше, чем эффективные размеры. В общем же случае, когда размеры источника могут быть меньше эффективных размеров, интегрирование следует проводить в конечных пределах:

$$J = C N_1^2 \rho_0 \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{2 R_1}{k a_i} \int_{-P_i}^{P_i} g^{(1)}(N_i, t_i) dt_i \right\}, \quad (32)$$

где

$$P_i = \frac{k a_i}{2 R_1} B_i, \quad (32a)$$

$$g^{(1)}(N_i, t_i) = \frac{\sin^2(N_i t_i)}{\sin^2(t_i)}, \quad (32b)$$

B_i — полуширина источника в направлении x_{i3} .

Выражение (32) можно легко проинтегрировать, если подынтегральную функцию заменить на следующую:

$$g^{(2)}(N_i, t_i) = \frac{\sin^2(N_i t_i)}{t_i^2}. \quad (32в)$$

Рассмотрим условия, при которых такая замена возможна. Предположим, что P_i удовлетворяет условию $0 \leq P_i \leq \pi$. Обозначим через $\Delta(N_i, t_i)$ разность функций (32б) и (32в):

$$\Delta(N_i, t_i) = g^{(1)}(N_i, t_i) - g^{(2)}(N_i, t_i). \quad (33)$$

Отношение этой разности к (32б) обозначим через $\delta(t_i)$:

$$\delta(t_i) = \frac{\Delta(N_i, t_i)}{g^{(1)}(N_i, t_i)} = 1 - \frac{\sin^2(t_i)}{t_i^2}. \quad (34)$$

$\delta(t_i)$ не зависит от параметра N_i . Для максимального и минимального значений $\delta(t_i)$ имеем

$$[\delta(t_i)]_{\min} = \delta(0) = 0, \quad (35)$$

$$[\delta(t_i)]_{\max} = \delta(P_i) = 1 - \frac{\sin^2(P_i)}{P_i^2}. \quad (36)$$

Из выражений (33) и (34) имеем

$$g^{(1)}(N_i, t_i) = g^{(2)}(N_i, t_i) [1 - \delta(t_i)]^{-1}, \quad (37)$$

откуда

$$g^{(2)}(N_i, t_i) [1 - [\delta(t_i)]_{\min}]^{-1} \leq g^{(1)}(N_i, t_i) \leq g^{(2)}(N_i, t_i) [1 - [\delta(t_i)]_{\max}]^{-1}$$

или

$$g^{(2)}(N_i, t_i) \leq g^{(1)}(N_i, t_i) \leq \frac{P_i^2}{\sin^2(P_i)} g^{(2)}(N_i, t_i). \quad (38)$$

Проинтегрировав это неравенство, получим

$$\int_{-P_i}^{P_i} g^{(2)}(N_i, t_i) dt_i \leq \int_{-P_i}^{P_i} g^{(1)}(N_i, t_i) dt_i \leq \frac{P_i^2}{\sin^2(P_i)} \int_{-P_i}^{P_i} g^{(2)}(N_i, t_i) dt_i. \quad (39)$$

При выполнении, например, условия

$$P_i \leq 1/2 \quad (40)$$

неравенство (39) принимает следующий вид:

$$\int_{-P_i}^{P_i} g^{(2)} dt_i \leq \int_{-P_i}^{P_i} g^{(1)} dt_i \leq 1,08 \int_{-P_i}^{P_i} g^{(2)} dt_i. \quad (41)$$

Хотя условие (40) является произвольным, однако если представить его как

$$2 B_i / R_1 \leq \lambda / \pi a_i \approx 1/3, \quad (42)$$

то видно, что отношение диаметра источника к расстоянию между центрами источника и кристалла не должно превышать $1/3$, что на практике очень хорошо выполняется, и поэтому будем считать, что такое условие вполне удовлетворяет требованиям, дающим возможность замены выражения (32б) на (32в).

Таким образом, при выполнении (40) вместо (32) можно написать

$$J = CN_i^2 \rho_0 \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{2R_1}{ka_i} \int_{-P_i}^{P_i} g^{(2)}(N_i, t_i) dt_i \right\} = CN_i \rho_0 \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{4R_1}{ka_i} N_i F(v_i) \right\}, \quad (43)$$

где

$$v_i = N_i P_i = N_i B_i \frac{ka_i}{2R_1}, \quad (43a)$$

$$F(v_i) = \text{Si}(2v_i) - \frac{\sin^2 v_i}{v_i}, \quad (43б)$$

Si — интегральный синус.

На рис. 3 приведены графики $y = x$, $y = \text{Si}(2x)$, $y = x^{-1} \sin^2 x$, $y = F(x)$. При выполнении условия

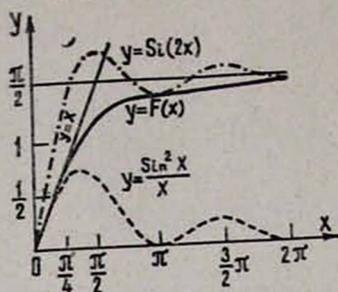


Рис. 3.

$$v_i \leq \pi/4, \text{ т. е. } \frac{2B_i}{R_1} \leq \frac{1}{2N_i} \frac{\lambda}{a_i} \quad (44)$$

имеет место неравенство

$$v_i^{-1} [v_i - F(v_i)] \leq 0,05$$

и, следовательно, можно принять $F(v_i) \approx v_i$ (см. рис. 3). Тогда из (43) получаем

$$J = CN_1^2 N_2^2 N_3^2 N_s, \quad (45)$$

где $N_s = 4\rho_0 B_2 B_3$ — число атомов источника.

Выражение для степени когерентности (23) в этом случае имеет вид

$$j = 1 - (N_1 N_2 N_3)^{-1}, \quad (46)$$

т. е. степень когерентности зависит от размеров рассеивающего кристалла.

Рассмотрим теперь (43) при выполнении (40) и условия $v_i > \frac{3}{4}\pi$,

т. е.

$$\frac{3}{2} N_i \leq \frac{2B_i}{R_1} \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{a_i}. \quad (47)$$

В этой области имеет место неравенство $\frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - F(v_i) \right] \leq 0,11$ и, следовательно, можно положить $F(v_i) \approx \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 3). Выражение (43) при этом принимает вид

$$J = CN_1^2 \rho_0 \frac{R_1^2 \lambda^2}{a_2 a_3} N_2 N_3, \quad (48)$$

что совпадает с результатом (21). Однако эффективные размеры источника $B_{i \text{эфф}}$, которые определяются из условия (47), несколько отличаются от (20):

$$B_{i \text{эфф}} = \frac{3}{4} \frac{R_1 \lambda}{N_i a_i}. \quad (49)$$

Таким образом, приходим к выводу, что выражение (43) более полно отражает зависимость интенсивности дифрагированных волн от размеров источника. При увеличении размеров источника происходит переход от линейной зависимости к некоторому постоянному значению интенсивности (48), после чего дальнейшее увеличение размеров источника не приводит к изменению интенсивности дифрагированных волн в точке наблюдения. Заметим также, что при выводе (21) предполагалось, что N_i обычно являются большими числами (однако в приближении кинематической теории N_i не должны превышать 10^4), что на практике не всегда

выполняется. При выводе (43) требовалось только, чтобы имело место условие (42), которое практически всегда выполняется.

Этим же методом исследуем теперь случай, когда поверхность источника составляет угол α с плоскостью (xy) (рис. 2). Уравнение (25) принимает вид

$$J(\alpha) = C_{\rho_0} \int_{-B_2}^{B_2} \frac{\sin^2 \left(N_2 \frac{ka_2 x_{2z}}{2R_1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{ka_2 x_{2z}}{2R_1} \right)} dx_{2z} \times \\ \times \int_{-B_1}^{B_1} \frac{\sin^2 \left(N_1 \frac{ka_1 \cos \alpha l_z}{2R_1} \right) \sin^2 \left(N_3 \frac{ka_3 \sin \alpha l_z}{2R_1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{ka_1 \cos \alpha l_z}{2R_1} \right) \sin^2 \left(\frac{ka_3 \sin \alpha l_z}{2R_1} \right)} dl_z, \quad (50)$$

где B_2 и B_1 — полуширины источника соответственно в направлениях y_z и l_z .

Далее, воспользуемся условием (40), которое в этом случае будет иметь вид

$$B_2 \frac{ka_2}{2R_1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{2B_2}{R_1} \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{a_2}, \\ B_1 \frac{ka_1 \cos \alpha}{2R_1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{2B_1}{R_1} \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{a_1 \cos \alpha}, \\ B_1 \frac{ka_3 \sin \alpha}{2R_1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{2B_1}{R_1} \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{a_3 \sin \alpha}. \quad (51)$$

Эти условия практически всегда выполняются, поэтому (50) можно преобразовать к виду

$$J(\alpha) = C_{\rho_0} \left(\frac{2R_1}{k} \right)^2 \frac{1}{a_2} \int_{-P_2}^{P_2} \frac{\sin^2(N_2 x)}{x^2} dx \times \\ \times \int_{-P_1}^{P_1} \frac{\sin^2(N_1 a_1 \cos \alpha) \sin^2(N_3 a_3 \sin \alpha)}{a_1^2 a_3^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha x^4} dx, \quad (52)$$

где

$$P_2 = B_2 \frac{ka_2}{2R_1}, \quad P_1 = B_1 \frac{k}{2R_1}.$$

После интегрирования (52) будем иметь

$$J(\alpha) = C_{\rho_0} \left(\frac{4R_1}{k} \right)^2 \frac{1}{a_2} N_1^2 N_2 N_3^2 F(v_2) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3\eta^2} \right) [\text{Si}[2P_1(\xi + \eta)] + \right. \\ \left. + \text{Si}[2P_1(\xi - \eta)]] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{3\xi^2} \right) [\text{Si}[2P_1(\xi + \eta)] + \text{Si}[2P_1(\eta - \xi)]] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi}{3\gamma^2} \text{Si}[2P_1\xi] - \frac{\eta}{3\xi^2} \text{Si}[2P_1\eta] - \frac{1}{3} P_1 \left[\cos(2P_1\xi) \frac{\sin^2(\eta P_1)}{(\eta P_1)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \cos(2P_1\eta) \frac{\sin^2(\xi P_1)}{(\xi P_1)^2} + 4 \frac{\sin(2\xi P_1)}{2\xi P_1} \frac{\sin(2\eta P_1)}{2\eta P_1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sin(2\xi P_1)}{2\xi P_1} \frac{\sin^2(\eta P_1)}{(\eta P_1)^2} + \frac{\sin(2\eta P_1)}{2\eta P_1} \frac{\sin^2(\xi P_1)}{(\xi P_1)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sin^2(\eta P_1)}{(\eta P_1)^2} \frac{\sin^2(\xi P_1)}{(\xi P_1)^2} \right] \Bigg\}, \quad (53)
\end{aligned}$$

где v_2 и $F(v_2)$ даются выражениями (43a) и (43б),

$$\xi = N_1 a_1 \cos \alpha, \quad \eta = N_3 a_3 \sin \alpha. \quad (54)$$

Следует помнить также, что практический смысл имеют лишь значения $0 < \alpha \leq \pi/2$. Подстановкой $\alpha = \pi/2$ и $B_1 \equiv B_2$ в (53) получаем (43). При значениях α , близких к нулю, из (53) имеем

$$J = C_{p0} N_3^2 \prod_{i=1}^2 \left\{ \frac{4 R_i}{k a_i} N_i F(v_i) \right\}, \quad (55)$$

где $B_i \equiv B_1$. При остальных значениях α следует воспользоваться выражением (53).

Таким образом, в кинематическом приближении получено общее выражение для интенсивности дифрагированных волн в зависимости от размеров и наклона двумерного источника к кристаллическому образцу. Представляется интересным рассмотреть интенсивность дифрагированных волн в приближении динамической теории рассеяния, о чем будет сообщено в последующих публикациях.

СКТБ полупроводниковой
техники

Поступила 1.V. 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Безириания П. А., Безириания А. П. Ученые записки ЕГУ, № 1 (1982).
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики, Изд. Наука, М., 1970.
3. Франсон М., Сланский С. Когерентность в оптике, Изд. Наука, М., 1967.

ՌԵՏԳԵՆՅԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԱԿԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԿՈՂՆԵՐԵՆՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿ ՑՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Հ. Պ. ԲԵՋԻՐՅԱՆՅԱՆ

Կինեմատիկ տեսության մոտավորությամբ դիտարկված է երկչափ ուղղանկյուն աղբյուրի բյուրեղական ցանցից դիֆրակցված ունեղենյան բնութագրական ճառագայթման ալիքների ինտենսիվությունը: Ստացված է դիֆրակցված ալիքի ինտենսիվության կախումը աղբյուրի չափերից և ճառագայթվող նմուշի նկատմամբ աղբյուրի թեթևությունից: Ցույց է տրված, որ սկսած աղբյուրի չափերի որոշակի արժեքներից, որանք անվանված են էֆեկտիվ չափեր, նրանց հետագա մեծացումը չի բերում դիտարկվող կետում ինտենսիվության փոփոխությանը:

THE COHERENCE OF X-RAY CHARACTERISTIC RADIATION AT THE KINEMATIC SCATTERING

A. P. BEZIRGANYAN

The intensity of X-ray characteristic radiation from a two-dimensional rectangular source was considered in the kinematic theory approximation. The dependence of the intensity of diffracted waves on source dimensions and on the angle of inclination to the irradiated specimen was obtained.

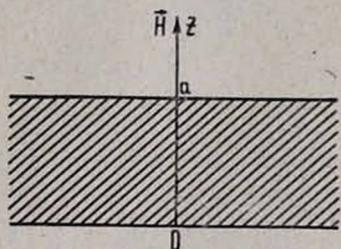
Изв. АН Армянской ССР, Физика, 17, 79-83 (1982)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛАБО ИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ (С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ФИЗИКЕ ИОНОСФЕРЫ)

Ю. С. ВАРДАНЯН

Уравнения магнитной гидродинамики справедливы лишь при очень больших скоростях по сравнению с относительной скоростью электронов и ионов ($\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$) или при отсутствии электрического тока. Поэтому в ионосферной плазме необходимо применять квазигидродинамические уравнения, рассматривая плазму как смесь электронного, ионного газов и газа нейтральных молекул.

Пусть имеется слой слабо ионизированного газа, расположенный между поверхностями $z = 0$ и $z = a$, и магнитное поле \mathbf{H} , перпендикулярное границам раздела (см. рисунок). Будем рассматривать медленное движение нейтрального газа с заданной скоростью \mathbf{W} . Тогда уравнения для ионов и электронов можно записать в виде



$$n_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i \right) = e n_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{H}] \right) - \\ - \nabla p_i + 2 n_i m_i [\mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}] + n_i m_i (g + [\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}]]) - \\ - n_e m_e \gamma_{ei} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) + n_i m_i \gamma_{in} (\mathbf{W} - \mathbf{v}_i), \quad (1)$$

$$n_e m_e \left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e \right) = - e n_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}] \right) - \\ - \nabla p_e + 2 n_e m_e [\mathbf{v}_e \times \boldsymbol{\Omega}] + n_e m_e (g + [\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}]]) + \\ + n_e m_e \gamma_{ei} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) + n_e m_e \gamma_{en} (\mathbf{W} - \mathbf{v}_e). \quad (2)$$

Здесь m_i , m_e — массы соответственно иона и электрона, \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e — их скорости, $p_i = n_i k T_i$, $p_e = n_e k T_e$ — их давления, где n_i , n_e — концент-