Изв. АН Армянской ССР, Физика, 16, 439—448 (1981)

# ДИНАМИЧЕСКИЕ МАКСИМУМЫ РЕНТГЕНОВСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ОБРАЗУЕМОГО В СТОПКЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Г. М. ГАРИБЯН, ЯН ШИ

При прохождении быстрой заряженной частицы через кристалл в результате дифракции поля заряда на кристаллической решетке и динамического взаимодействия волн возникают узкие и высокие максимумы излучения. При пролете частицы через стопку регулярно расположенных кристаллических пластин происходит дальнейшая интерференция волн, возникающих в разных пластинах. Найдены условия, при которых динамические максимумы усиливаются.

Ранее было показано [1], что в спектре рентгеновского переходного излучения, образуемого в достаточно толстом монокристалле, вблизи частот Брэгга появляются высокие и узкие максимумы, названные динамическими. Эти максимумы узки, поэтому несмотря на свои большие значения после интегрирования по углам и частотам они дают сравнительно небольшое число квантов. Естественно встает вопрос о том, чтобы попытаться увеличить это число квантов путем создания стопки кристаллических пластин и использования эффектов интерференции. В настоящей работе решается такая задача и проводится соответствующий анализ полученных формул. Показано, что динамические максимумы в стопке возрастают по спектральной интенсивности, но ширины этих максимумов уменьшаются.

1. Рассмотрим рентгеновское переходное излучение, образуемое при пролете ультрарелятивистской заряженной частицы через стопку регулярно расположенных $N$ одинаковых кристаллических пластин. Будем считать, что число $N$ такое, что имеет место неравенство

$$|Nr_1|^2 \ll 1, \tag{1}$$

где $r_1 \approx \omega_0^2/4\omega^2$ — коэффициент отражения рентгеновского излучения от границы пластины. Из-за малости величины $r_1$ вышеуказанное неравенство справедливо вплоть до $N$ порядка $10^4$. При выполнении этого условия излучение, небрэгговски отраженное от границ пластин, является слабым, и мы будем им пренебрегать.

Следуя [1], мы будем считать, что помимо поля заряда $\mathbf{E}^{\text{зар}}$ в кристаллических пластинах имеются поля $\mathbf{E}^{\text{рас}}$ и $\mathbf{E}^{\text{св}}$, а в вакуумных отсеках имеется поле $\mathbf{E}^{\text{вак}}$. Фурье-компоненты этих полей имеют вид

$$\mathbf{E}^{\text{рас}}(\mathbf{k}) = (E_n^{\text{рас}}\mathbf{e}_n + E_p^{\text{рас}}\mathbf{e}_p)\,\delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right),$$

$$\mathbf{E}^{\text{рас}}(\mathbf{k}_h) = (E_{hn}^{\text{рас}}\mathbf{e}_n + E_{hp}^{\text{рас}}\mathbf{e}_p)\,\delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right),$$

$$\mathbf{E}^{\text{св}}_{(m)}(\mathbf{k}) = [E^{\text{св}}_{n1\,(m)}\,\delta(k_z - \lambda_{n1}) + E^{\text{св}}_{n2\,(m)}\,\delta(k_z - \lambda_{n2})]\,\mathbf{e}_n +$$

$$+ [E^{\text{св}}_{p1\,(m)}\,\delta(k_z - \lambda_{p1}) + E^{\text{св}}_{p2\,(m)}\,\delta(k_z - \lambda_{p2})]\,\mathbf{e}_p,$$

$$\mathbf{E}^{\text{св}}_{(m)}(\mathbf{k}_h) = [E^{\text{св}}_{n1\,(m)}\,\delta(k_{hz} - K_{hz} - \lambda_{n1}) + E^{\text{св}}_{n2\,(m)} \times$$

$$\times\,\delta(k_{hz} - K_{hz} - \lambda_{n2})]\,\frac{(\eta_0 - g_0)}{g_h}\,\mathbf{e}_n +$$

$$+ [E^{\text{св}}_{p1\,(m)}\,\delta(k_{hz} - K_{hz} - \lambda_{p1}) + E^{\text{св}}_{p2\,(m)} \times \tag{2}$$

$$\times\,\delta(k_{hz} - K_{hz} - \lambda_{p2})]\,\frac{(\eta_0 - g_0)}{\zeta g_h}\,\mathbf{e}_{hp},$$

$$\mathbf{E}^{\text{вак}}_{(m)}(\mathbf{k}) = (E^{\text{вак}}_{n\,(m)}\,\mathbf{e}_n + E^{\text{вак}}_{p\,(m)}\,\mathbf{e}_p)\,\delta(k_z - \lambda_0),$$

$$\mathbf{E}^{\text{вак}}_{(m)}(\mathbf{k}_h) = (E^{\text{вак}}_{hn\,(m)}\,\mathbf{e}_n + E^{\text{вак}}_{hp\,(m)}\,\mathbf{e}_{hp})\,\delta(k_{hz} \mp \lambda_h),$$

где индекс $m$ означает номер вакуумного отсека или кристаллической пластины соответственно для $\mathbf{E}^{\text{вак}}_{(m)}$ и $\mathbf{E}^{\text{св}}_{(m)}$, индексы $n$ и $p$ означают нормальную и параллельную поляризации, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_{hp}$ — соответствующие им единичные векторы,

$$\lambda_0 = (\omega/c)(1 - k_\perp^2 c^2/\omega^2)^{1/2}, \quad \lambda_h = (\omega/c)(1 - k_{h\perp}^2 c^2/\omega^2)^{1/2},$$

$$\lambda_{\alpha j} = \lambda_0 (1 - \Delta_{\alpha j}) \quad (\alpha = n,\ p,\ j = 1,\ 2).$$

Знаки $\mp$ в аргументе $\delta$-функции в выражении $E^{\text{вак}}_{(m)}(k_h)$ соответствуют случаям Лауэ и Брэгга. Кроме того, использованы обозначения

$$E^{\text{рас}}_n = \frac{8\pi^2 e i v\,[\mathbf{k}\mathbf{k}_h]}{v\omega\,|[\mathbf{k}\mathbf{k}_h]|}\cdot\frac{g_0(\bar{\nu} + \eta_0\zeta - g_0) + |g_h|^2}{\eta_0 D_n},$$

$$E^{\text{рас}}_{hn} = \frac{8\pi^2 e i v\,[\mathbf{k}\mathbf{k}_h]}{v\omega\,|[\mathbf{k}\mathbf{k}_h]|}\,\frac{g_h}{D_n}, \tag{3}$$

$$E^{\text{рас}}_p = \frac{g_0\zeta\,[q_0(\bar{\nu} + \eta_0\zeta - g_0) + |g_h|^2] - q_h\,[g_0(\bar{\nu} + \eta_0\zeta - g_0) + \zeta^2 |g_h|^2]}{|\zeta\mathbf{k} - \mathbf{k}_h|\,D_p},$$

$$E^{\text{рас}}_{hp} = \frac{g_h\,\{q_0[\eta_0 - g_0(1 - \zeta^2)] - \zeta\eta_0 q_h\}}{|\mathbf{k} - \zeta\mathbf{k}_h|\,D_p},$$

$$\Delta_{nj} = \frac{\bar{\nu} - g_0\zeta - g_0 \pm [(g_0\zeta - g_0 + \bar{\nu})^2 + 4|g_h|^2\zeta]^{1/2}}{4\zeta}, \tag{4}$$

$$\bar{\nu} = (2\nu - \vartheta^2)(\zeta - 1) + 2\vartheta\sqrt{1 - \zeta^2}\cos\varphi, \quad \nu = (\omega - \omega_B)/\omega_B,$$

$$\zeta = \cos 2\theta_B = \frac{\mathbf{K}_h^2 - 2K_{hz}^2}{\mathbf{K}_h^2}, \quad \omega_B = \frac{c\mathbf{K}_h^2}{2|K_{hz}|},$$

$$\eta_0 = 1 - \beta^2 + \vartheta^2, \quad \vartheta = k_\perp c/|\omega|,$$

$$q_0 = -\frac{8\pi^2 e i}{v}, \quad q_h = q_0\left[1 + \frac{K_{hz}(1 - \beta^2)\omega/v + k_\perp K_{\perp h}}{k_\perp + \omega^2/v^2 - \omega^2/c^2}\right],$$

$$D_n = (\eta_0 - g_0)(\bar{\nu} + \eta_0\zeta - g_0) - |g_h|^2. \tag{5}$$

Величины $\Delta_{pj}$ и $D_p$ получаются соответственно из $\Delta_{nj}$ и $D_n$ (формулы (4) и (5)) заменой $|g_h|^2$ на $\zeta^2|g_h|^2$, $\mathbf{K}_h/2\pi$ — вектор обратной решетки кристалла, $\mathbf{k}_h = \mathbf{k} + \mathbf{K}_h$, $g_0$, $g_h$ — параметры, характеризующие рассеивающую способность кристалла.

В выражениях (1) величины $\mathbf{E}^{\text{вак}}_{\alpha(m)}$, $\mathbf{E}^{\text{вак}}_{h\alpha(m)}$ и $\mathbf{E}^{\text{св}}_{\alpha j(m)}$ — пока еще неопределенные амплитуды полей, которые следует найти из граничных условий.

2. Запишем, например, условия непрерывности для нормальной поляризации ($\alpha = n$) на границе раздела $q$-го вакуумного отсека с $(q+1)$-ой пластиной ($z = z_q = q(a+b)$):

$$E^{\text{вак}}_{n(q)} \exp(i\lambda_0 z_q) = E^{\text{рас}}_{n} \exp\left(i\frac{\omega z_q}{v}\right) + E^{\text{св}}_{n1(q+1)} \times \\ \times \exp(i\lambda_{n1} z_q) + E^{\text{св}}_{n2(q+1)} \exp(i\lambda_{n2} z_q), \tag{6}$$

$$E^{\text{вак}}_{hn(q)} \exp(-i(K_{hz} \mp \lambda_h) z_q) = E^{\text{рас}}_{hn} \exp\left(i\frac{\omega z_q}{v}\right) - \\ - d_{n1} E^{\text{св}}_{n1(q+1)} \exp(i\lambda_{n1} z_q) - d_{n2} E^{\text{св}}_{n2(q+1)} \exp(i\lambda_{n2} z_q), \tag{7}$$

где

$$d_{nj} = \frac{2\Delta_{nj} + g_0}{g_h}. \tag{8}$$

Знаки $\mp$ в формуле (7) соответствуют случаям Лауэ и Брэгга, при том соответственно имеем $\lambda_h = \lambda_0 + K_{hz}$ и $\lambda_h = -\lambda_0 - K_{hz}$. Так что в обоих случаях экспоненциальный множитель в левой части формулы (7) имеет вид $\exp(i\lambda_0 z_q)$.

Аналогичным образом условия непрерывности на границе раздела $(q+1)$-ой пластины с $(q+1)$-ым вакуумным отсеком ($z = z_q + a$) имеют вид

$$E^{\text{рас}}_{n} \exp\left(i\frac{\omega}{v}(z_q + a)\right) + E^{\text{св}}_{n1(q+1)} \exp(i\lambda_{n1}(z_q + a)) + \\ + E^{\text{св}}_{n2(q+1)} \exp(i\lambda_{n2}(z_q + a)) = E^{\text{вак}}_{n(q+1)} \exp(i\lambda_0(z_q + a)), \tag{9}$$

$$E^{\text{рас}}_{hn} \exp\left(i\frac{\omega}{v}(z_q + a)\right) - d_{n1} E^{\text{св}}_{n1(q+1)} \exp(i\lambda_{n1}(z_q + a)) - \\ - d_{n2} E^{\text{св}}_{n2(q+1)} \exp(i\lambda_{n2}(z_q + a)) = E^{\text{вак}}_{hn(q+1)} \exp(i\lambda_0(z_q + a)) \tag{10}$$

как для случая Лауэ, так и для случая Брэгга.

Условия непрерывности для параллельной поляризации ($\alpha = p$) записываются в точности так же с заменой индекса $n$ на $p$ в уравнениях (6), (7), (9) и (10). При этом

$$d_{pj} = \frac{2\Delta_{pj} + g_0}{g_h \zeta}. \tag{11}$$

В дальнейшем для простоты записи индексы $n$ и $p$ будем опускать.

Используя (6), (7), (9) и (10), выразим $E^{\text{вак}}_{(q+1)}$ и $E^{\text{вак}}_{h\,(q+1)}$ через $E^{\text{вак}}_{(q)}$ и $E^{\text{вак}}_{h\,(q)}$. Для этого достаточно выразить, например, из (6) и (7) величины $E^{\text{св}}_{1(q+1)}$ и $E^{\text{св}}_{2\,(q+1)}$ через $E^{\text{вак}}_{(q)}$, $E^{\text{вак}}_{h\,(q)}$ и подставить их в (9) и (10). Результат удобно записать в матричной форме

$$\hat{E}(q+1)=\hat{S}\hat{E}(q)-\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}-\lambda_0\right)z_q\right]\hat{R}\,\hat{E}_{\text{рас}}, \tag{12}$$

где

$$\hat{E}(q)\equiv\begin{pmatrix}E^{\text{вак}}_{(q)}\\ E^{\text{вак}}_{h\,(q)}\end{pmatrix},\ \hat{E}_{\text{рас}}\equiv\begin{pmatrix}E^{\text{рас}}\\ E^{\text{рас}}_{h}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\hat{S}\equiv\begin{pmatrix}d_2e^{i\lambda_1a}-d_1e^{i\lambda_2a} & e^{i\lambda_1a}-e^{i\lambda_2a}\\ -d_1d_2\left[e^{i\lambda_1a}-e^{i\lambda_2a}\right] & d_2e^{i\lambda_2a}-d_1e^{i\lambda_1a}\end{pmatrix}\frac{\exp(-i\lambda_0a)}{d_2-d_1}, \tag{14}$$

$$\hat{R}\equiv\hat{S}-\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_0\right)a\right]\cdot\hat{I}, \tag{15}$$

$I$ — единичная матрица.

3. Введем новые величины

$$\hat{F}(q+1)=\hat{E}(q+1)+\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_0\right)z_q\right]\cdot\hat{A} \tag{16}$$

и подберем $\hat{A}$ таким образом, чтобы имело место соотношение (см. [2])

$$\hat{F}(q+1)=\hat{S}\hat{F}(q) \tag{17}$$

для произвольного $q$. Подставим в (17) формулы (16) и воспользуемся (12). В результате для определения величины $A$ получим уравнение

$$-\hat{R}\hat{E}_{\text{рас}}+\hat{A}=\exp\left[-i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_0\right)(a+b)\right]\hat{S}\hat{A},$$

откуда

$$\hat{A}=\hat{Q}^{-1}\hat{R}\hat{E}_{\text{рас}}, \tag{18}$$

где

$$\breve{Q}=\breve{I}-\exp\left[-i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_0\right)(a+b)\right]\hat{S}. \tag{19}$$

Последовательно применяя соотношение (17), получим

$$\hat{F}(N)=\hat{S}^{N-1}\cdot\hat{F}(1).$$

Теперь воспользуемся (16) и (12) и найдем связь между $\hat{E}(N)$ и $\hat{E}(0)$:

$$\hat{E}(N)=\hat{S}^{N}\hat{E}(0)-\hat{S}^{N-1}\hat{R}\,\hat{E}_{\text{рас}}+$$
$$+\left(\hat{S}^{N-1}-\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_0\right)z_{N-1}\right]\hat{I}\right)\hat{A}.$$

Исключая из последней формулы $\hat{A}$ с помощью (18), окончательно получаем

$$\hat{E}(N) = \hat{S}^N \hat{E}(0) + \hat{P}\hat{E}_{\text{рас}}, \tag{20}$$

где

$$\hat{P} \equiv \left\{ \left\{ \hat{S}^{N-1} - \exp\left[ i \left( \frac{\omega}{v} - \lambda_0 \right) z_{N-1} \right] \hat{I} \right\} \hat{Q}^{-1} - \hat{S}^{N-1} \right\} \hat{R}. \tag{21}$$

В случае Лауэ имеем

$$\hat{E}(N) = \begin{pmatrix} E_{(N)}^{\text{вак}} \\ E_{h\,(N)}^{\text{вак}} \end{pmatrix}, \ \hat{E}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

а в случае Брэгга

$$\hat{E}(N) = \begin{pmatrix} E_{(N)}^{\text{вак}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \hat{E}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{h\,(0)}^{\text{вак}} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Поэтому матричное уравнение (20) фактически представляет собой систему двух линейных неоднородных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Решение этих уравнений можно записать в явном виде. В случае Лауэ оно есть

$$\begin{aligned} E_{(N)}^{\text{вак}} &= P_{11} E^{\text{рас}} + P_{12} E_h^{\text{рас}}, \\ E_{h\,(N)}^{\text{вак}} &= P_{21} E^{\text{рас}} + P_{22} E_h^{\text{рас}}, \end{aligned} \tag{24}$$

в случае Брэгга—

$$\begin{aligned} E_{(N)}^{\text{вак}} &= P_{11} E^{\text{рас}} + P_{12} E_h^{\text{рас}} - \frac{S_{12}^N}{S_{22}^N} (P_{21} E^{\text{рас}} + P_{22} E_h^{\text{рас}}), \\ E_{h\,(0)}^{\text{вак}} &= - \frac{P_{21} E^{\text{рас}} + P_{22} E_h^{\text{рас}}}{S_{22}^N}. \end{aligned} \tag{25}$$

Величины $P_{ij}$ — элементы матрицы (21).

Матричные элементы $S_{ij}^N$ можно вычислить с помощью теоремы о степенях унимодулярной матрицы (см., напр., [3]):

$$\begin{aligned} S_{11}^N &= P_N \psi_N, \\ S_{12}^N &= \frac{i\xi\, g_h \sin(Nx)\, \psi_N}{\Delta_2 - \Delta_1}, \\ S_{21}^N &= - \frac{i\,(2\Delta_1 + g_0)(2\Delta_2 + g_0)\, \psi_N \sin(Nx)}{\xi\, g_h (\Delta_2 - \Delta_1)}, \\ S_{22}^N &= \psi_N \bar{p}_N, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\psi_N = \exp\left[ -i \frac{N(\Delta_1 + \Delta_2)\lambda_0 a}{2} \right],$$

$$x = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)\lambda_0 a}{2},$$

$$p_N = \cos Nx + i\frac{\Delta_1 - \Delta_2 + g_0}{\Delta_2 - \Delta_1}\sin Nx, \tag{27}$$

$$\bar{p}_N = \cos Nx - i\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + g_0}{\Delta_2 - \Delta_1}\sin Nx$$

и $\xi = 1$ или $\zeta$ в зависимости от типа поляризации ($n$ или $p$).

С помощью (21), (19), (15) и (26) после простых, но довольно громоздких вычислений можно получить явный вид матричных элементов $P_{ij}$:

$$P_{11} = \frac{\psi_N \exp(-i\varphi)}{\det Q}\{p_{N+1} - p_N[\exp(-i\varphi) + \exp(i(\varphi - \varphi_0))] + \\ + p_{N-1}\exp(-i\varphi_0) - p_1\exp(iN\varphi) - \bar{p}_1\exp(i(N\varphi - \varphi_0)) + \\ + \exp(iN\varphi)[\exp(i(\varphi - \varphi_0)) + \exp(-i\varphi)]\}, \tag{28}$$

$$P_{12} = \frac{i\xi g_h \psi_N \exp(-i\varphi)}{(\Delta_2 - \Delta_1)\det Q}\{\sin(N+1)x - \sin Nx[\exp(-i\varphi) + \exp(i(\varphi - \varphi_0))] + \\ + \exp(-i\varphi_0)\sin(N-1)x - \sin x[1 - \exp(-i\varphi_0)]\exp(iN\varphi)\}, \tag{29}$$

$$P_{21} = -\frac{i(2\Delta_1 + g_0)(2\Delta_2 + g_0)\psi_N}{\xi g_h(\Delta_2 - \Delta_1)\det Q}\exp(-i\varphi)\{\sin(N+1)x - \\ - \sin Nx[\exp(-i\varphi) + \exp(i(\varphi - \varphi_0))] + \exp(-i\varphi_0) \times \\ \times \sin(N-1)x - \sin x \cdot \exp(iN\varphi)[1 - \exp(-i\varphi_0)]\}, \tag{30}$$

$$P_{22} = \frac{\psi_N \exp(-i\varphi)}{\det Q}\{\bar{p}_{N+1} - \bar{p}_N[\exp(-i\varphi) + \exp(i(\varphi - \varphi_0))] + \\ + \bar{p}_{N-1}\exp(-i\varphi_0) - \bar{p}_1\exp(iN\varphi) - p_1\exp(i(N\varphi - \varphi_0)) + \\ + \exp(iN\varphi)[\exp(-i\varphi) + \exp(i(\varphi - \varphi_0))]\}, \tag{31}$$

где

$$\varphi = \left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right)(a + b) + \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)\lambda_0 a}{2},$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right)b, \tag{32}$$

$$\det Q = 2\exp(-i\varphi)(\cos\varphi - \cos x).$$

В частном случае одной кристаллической пластины ($N = 1$) из формул (24) и (25) с учетом (26)—(32) непосредственно получаем формулы (18) и (26) работы [1]. Для произвольного числа $N$, удовлетворяющего условию (1), но вдали от брэгговских частот, когда $|\bar{\nu}| \gg |g_0|$, $|g_h|$, получаем известную формулу рентгеновского переходного излучения макроскопической теории для тонкой стопки пластин (см., например, [4], формулу (48)).

4. Из формул (24) и (25) видно, что фурье-компоненты полей излучения как в случае Лауэ, так и в случае Брэгга содержат в знаменателе, как видно из (32), величину

$$X = \cos\varphi - \cos x = (\cos\varphi' \operatorname{ch}\varphi'' - \cos x' \operatorname{ch} x'') - \\ - i(\sin\varphi' \operatorname{sh}\varphi'' - \sin x' \operatorname{sh} x''), \tag{33}$$

где

$$\varphi = \varphi' + i\varphi'', \quad x = x' + ix''.$$

При $|X|^2 \ll 1$ мы имеем максимум излучения. Для этого необходимо потребовать, например, чтобы

$$|\varphi''| \ll 1, \; |x''| \ll 1, \tag{34}$$

$$\cos\varphi' - \cos x' = 0. \tag{35}$$

Из условий (34) следует, что толщина каждой кристаллической пластины $a$ должна быть много меньше длины поглощения как аномально, так и нормально проходящих волн. Условие (35) можно записать в виде

$$\varphi' - x' = 2n\pi, \text{ т. е. } \left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right)(a+b) + \Delta_1' \lambda_0 a = 2n\pi \tag{36}$$

или

$$\varphi' + x' = 2n\pi, \text{ т. е. } \left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right)(a+b) + \Delta_2' \lambda_0 a = 2n\pi, \tag{37}$$

где $\Delta_j = \Delta_j' + i\Delta_j''$, $n$ — целое число.

Найдем теперь амплитуды полей излучения при выполнении условий (34) и (35). Будем различать два случая:

А) когда вся стопка кристаллических пластин является почти прозрачной, т. е. $|N\varphi''| \ll 1$, $|Nx''| \ll 1$;

Б) когда поглощение во всей стопке велико как для нормально, так и для аномально проходящих волн, т. е. $|N\varphi''| > 1$, $|Nx''| > 1$.

Рассмотрим подробно эти случаи.

А. Раскрывая неопределенности в формулах (24) и (25), в случае Лауэ получаем:

$$E_{(N)}^{\text{вак}} = -\frac{\psi_N}{2(\Delta_2 - \Delta_1)}\Big\{ N\exp(iN\varphi)[1-\exp(-i\varphi_0)][(2\Delta_2 + g_0)E^{\text{рас}} + \\ + \xi g_h E_h^{\text{рас}}] + \frac{\sin N\varphi}{\sin\varphi}[\exp(i(\varphi-\varphi_0)) - \exp(-i\varphi)]\times \\ \times[(2\Delta_1 + g_0)E^{\text{рас}} + \xi g_h E_h^{\text{рас}}]\Big\}, \tag{38}$$

$$E_{h(N)}^{\text{вак}} = \frac{\psi_N}{2(\Delta_2 - \Delta_1)}\Big\{(2\Delta_1 + g_0)N\exp(iN\varphi)[1 - \\ - \exp(-i\varphi_0)]\left[\frac{2\Delta_2 + g_0}{\xi g_h}E^{\text{рас}} + E_h^{\text{рас}}\right] + (2\Delta_2 + g_0)[\exp(i(\varphi-\varphi_0)) - \\ - \exp(-i\varphi)]\frac{\sin N\varphi}{\sin\varphi}\left[\frac{2\Delta_1 + g_0}{\xi g_h}E^{\text{рас}} + E_h^{\text{рас}}\right]\Big\},$$

в случае Брэгга

$$E_{(N)}^{\text{вак}} = -\frac{\psi}{2\bar{p}_N'(\Delta_2-\Delta_1)}\Big\{[(2\Delta_2+g_0)E^{\text{рас}}+\xi g_h E_h^{\text{рас}}]N[1-$$

$$-\exp(-i\varphi_0)]+[(2\Delta_1+g_0)E^{\text{рас}}+\xi g_h E_h^{\text{рас}}]\exp(iN\varphi)\times$$

$$\times\frac{\sin N\varphi}{\sin\varphi}[\exp(i(\varphi-\varphi_0))-\exp(-i\varphi)]\Big\}, \tag{39}$$

$$E_{h\,(0)}^{\text{вак}} = -\frac{1}{2\bar{p}_N(\Delta_2-\Delta_1)}\Big\{(2\Delta_1+g_0)N\exp(iN\varphi)[1-$$

$$-\exp(-i\varphi_0)]\left[\frac{2\Delta_2+g_0}{\xi g_h}E^{\text{рас}}+E_h^{\text{рас}}\right]+(2\Delta_2+g_0)\frac{\sin N\varphi}{\sin\varphi}\times$$

$$\times[\exp(i(\varphi-\varphi_0))-\exp(-i\varphi)]\left[\frac{2\Delta_1+g_0}{\xi g_h}E^{\text{рас}}+E_h^{\text{рас}}\right]\Big\}.$$

Формулы (38) и (39) остаются в силе и в том случае, когда условие (35) выполняется приближенно. Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$N|x'-x_0|\ll 1, \tag{40}$$

где

$$x_0=\pm\varphi'+2n\pi.$$

Анализируя формулы для излучения, образованного в одной кристаллической пластине, в [1] было показано, что когда величина $D_\alpha$ (см. (5)), входящая в знаменатели величин $E_\alpha^{\text{рас}}$ и $E_{h\alpha}^{\text{рас}}$ (см. (3)), достигает минимума (по модулю), мы имеем максимум излучения, названный динамическим. Ширина этого максимума в случае прозрачной пластины ($|\lambda_0 a\Delta_j''|\ll 1$) определяется условием

$$|\lambda_0 a(\Delta_j'-\Delta_j^0)|\sim 1, \tag{41}$$

где $\Delta_j^0$ — соответствующее значение величины $\Delta_j$ в динамическом максимуме.

Варьируя толщину $a$ кристаллических пластин и расстояние $b$ между ними, можно добиться того, чтобы динамические максимумы интерференционно усиливались, т. е. чтобы условия (34) и (35) имели место в динамическом максимуме.

При этом, как видно из (38) и (39), амплитуды полей $E_{(N)}^{\text{вак}}$ и $E_{h(N)}^{\text{вак}}$ (или $E_{h\,(0)}^{\text{вак}}$) будут пропорциональны числу пластин $N$, а интенсивности — $N^2$. Однако, как видно из (40) и (41), ширина максимума будет уменьшена, грубо говоря, в $N$ раз. Таким образом, полная интенсивность или число квантов, проинтегрированная по всему максимуму, будет примерно увеличена в $N$ раз в рассматриваемом случае прозрачной стопки кристаллических пластин.

Б. Рассмотрим теперь случай непрозрачной стопки кристаллических пластин.

Поскольку имеют место соотношения [1]:

$$\Delta_1''<\Delta_2''<0$$

в случае Лауэ и

$$\Delta_2''<0<\Delta_1'',\quad \Delta_1''+\Delta_2''>0$$

в случае Брэгга, из неравенств

$$|N\varphi''| > 1 \quad \text{и} \quad |Nx''| > 1$$

в этих двух случаях на основе (24) и (25) соответственно получаем

$$E_{(N)}^{\text{вак}} = \frac{\xi g_h}{2\Delta_1 + g_0} E_{h\,(N)}^{\text{вак}} = \frac{[1 - \exp(-i\varphi_0)] \exp\left[ iN\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right)(a+b) \right]}{2(\Delta_2 - \Delta_1)\lambda_0 a \Delta_1'} \times$$

$$\times \{ (2\Delta_2 + g_0) E^{\text{рас}} + \xi g_h E_h^{\text{рас}} \}, \tag{42}$$

$$E_{(N)}^{\text{вак}} = \frac{\exp\left[ iN\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right)(a+b) \right] \exp(-i\varphi_0/2)}{\sin((x+\varphi)/2)} \times$$

$$\times \sin\frac{x + \varphi - \varphi_0}{2} \left[ E^{\text{рас}} + \frac{\xi g_h}{2\Delta_1 + g_0} E_h^{\text{рас}} \right],$$

$$E_{h\,(0)}^{\text{вак}} = \frac{\exp(-i\varphi_0/2)\sin((x - \varphi + \varphi_0)/2)}{\sin((x - \varphi)/2)} \times \tag{43}$$

$$\times \left[ \frac{2\Delta_2 + g_0}{\xi g_h} E^{\text{рас}} + E_h^{\text{рас}} \right].$$

Формула (42) записана в предположении, что выполняется условие (36). Если же выполняется условие (37), то в (42) следует произвести замену индексов $1 \rightleftarrows 2$. Формула (42) имеет место также и тогда, когда условие (35) выполняется приближенно. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$|x' - x_0| \ll |\Delta_j' \lambda_0 a|,$$

где $j=1$ при $x_0 = \varphi' + 2n\pi$ и $j=2$ при $x_0 = -\varphi' + 2n\pi$. Аналогичные ширины получаются также и в формулах (43).

Сравнивая соответственно формулы (42)—(44) и (38)—(40), мы видим, что выводы, сделанные в конце пункта А, справедливы и в рассматриваемом случае, если только заменить $N$ на $N_{\text{эфф}} \sim |\lambda_0 a \Delta_j'|^{-1}$.

5. Таким образом, в результате интерференции излучений, образованных в разных пластинах, в стопке появляются характерные максимумы, определяемые условиями (34) и (35). Такая ситуация типична для переходного излучения, образованного в регулярной стопке (см., например, [4]).

Изменяя $a$ и $b$, можно добиться того, чтобы динамические максимумы, возникающие в каждой кристаллической пластине, совпадали с интерференционными максимумами, обусловленными стопкой. При этом спектральная интенсивность динамических максимумов значительно возрастает, но ширина соответственно существенно уменьшается. В результате полная интенсивность динамического максимума будет увеличена примерно в $N$ раз в случае прозрачной стопки и в $N_{\text{эфф}}$ раз в случае непрозрачной стопки.

До сих пор мы рассматривали идеальную стопку, считая, что толщины всех кристаллических пластин и расстояния между ними совершенно одинаковы, а все кристаллы ориентированы одинаково. Естественно поставить вопрос, что произойдет, если эти толщины и расстояния, а также ориентация кристаллов имеют некоторый разброс. Неточность в ориентации кристаллов приводит к разбросу значений брэгговской частоты. Если эти неточности меньше, чем угловая ширина, определяемая условием (41), то результат будет такой же, как и в случае стопки кристаллов с идеальной ориентацией.

Что касается разбросов $<\Delta a^2>$ и $<\Delta b^2>$ величин $a$ и $b$, то здесь дело будет обстоять аналогично тому, как это имело место в случае обычной стопки [5], а именно, слабо неидеальная стопка будет вести себя как идеальная, если выполняется условие

$$\sqrt{<\Delta a^2> + <\Delta b^2>} \ll \frac{c}{\omega N^{1/2}}$$

для прозрачной стопки, а для непрозрачной стопки $N$ следует заменить на $N_{эфф}$. Условие (45) получается из аналогичного условия (16) работы [5], если иметь в виду, что угол излучения в боковом пятне порядка единицы.

Ереванский физический
институт

Поступила 23. I. 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Гарибян, Ян Ши.* ЖЭТФ, 63, 1198 (1972).
2. *Г. М. Гарибян.* ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
3. *М. Борн, Э. Вольф.* Основы оптики, М., 1970, стр. 92.
4. *Г. М. Гарибян.* Научное сообщение ЕрФИ, 27 (73) — 1973.
5. *Г. М. Гарибян, Л. А. Геворкян, Ян Ши.* ЖЭТФ, 66, 552 (1974).

## ԲՅՈՒՐԵՂԱԿԱՆ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՇԵՐՏՈՒՄ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿ ՄԱՔՍԻՄՈՒՄՆԵՐԸ

Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, ՅԱՆ ՇԻ

*Բյուրեղի միջով արագ լիցքավորված մասնիկների անցման ժամանակ բյուրեղի ցանցի վրա լիցքի դաշտի դիֆրակցիայի և ալիքների դինամիկ փոխազդեցության պատճառով առաջանում են ճառագայթման նեղ ու բարձր մաքսիմումներ։ Բյուրեղական թիթեղների կանոնավոր շերտով մասնիկի անցման դեպքում տեղի է ունենում տարբեր թիթեղներում առաջացած ալիքների ինտերֆերենցիա։ Գտնված են վերոհիշյալ դինամիկ մաքսիմումների ուժեղացման պայմանները։*

## DYNAMICAL MAXIMA OF *X*-RAY TRANSITION RADIATION FORMED IN A STACK OF CRYSTAL PLATES

G. M. GARIBIAN, C. YANG

The passage of a fast charged particle through a crystal is known to result in narrow and high radiation maxima due to the diffraction of the charge field on a crystal lattice and to dynamical interactions of waves. When the particle transmits a stack of regularly arranged crystal plates, the interference of waves from different plates takes place. Here the conditions are found for the enhancement of dynamical maxima.