

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ
НА АНИЗОТРОПНОЙ СФЕРЕ

С. С. ОГАНЕСЯН, В. А. БАРЕГАМЯН

В работе рассмотрена задача о дифракции плоской электромагнитной волны на анизотропной сфере. Уравнения Максвелла для анизотропной среды решены методом построения сферических векторных функций. Изучено влияние анизотропии на рассеянное и дифрагированное поля. Вычислено поперечное сечение рассеяния.

Задаче о дифракции плоской электромагнитной волны на телах канонической формы, в частности, на сфере посвящено много работ (см., например, [1—3] и цитируемые там работы). Во всех этих работах авторы в основном интересовались проводящими и диэлектрическими средами. Получены очень важные и интересные результаты.

Наряду с этим надо отметить, что еще недостаточно широко рассмотрены задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на анизотропных и гиротропных телах. В работе [4] была рассмотрена задача о дифракции плоской электромагнитной волны на сфере с магнитной анизотропией. Метод, который применялся в ходе решения задачи, привел авторов к бесконечной системе неоднородных дифференциальных уравнений. Это значительно усложнило дальнейшее точное решение задачи. В приближении больших частот при малой намагниченности насыщения авторам удалось несколько упростить вышеупомянутую систему. Полученные дифференциальные уравнения в коротковолновом приближении были решены итерационным методом. В результате в первом приближении была получена радиальная функция.

В настоящей работе рассматривается задача о дифракции плоской линейно поляризованной электромагнитной волны на анизотропной сфере.

Постановка задачи

Пусть в безграничной однородной и изотропной среде с комплексными диэлектрическим (ϵ_1) и магнитным (μ_1) проницаемостями находится одноосный кристаллический шар с радиусом r_0 . Диэлектрическую и магнитную проницаемости кристалла обозначим через $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$, где $\hat{\epsilon}$ — диагональный тензор с элементами $\epsilon_0, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ в декартовой системе координат. Начало декартовой системы совместим с осью сферы, причем ось z направим вдоль оси анизотропии кристалла. В сферической системе координат r, θ, Φ тензор диэлектрической проницаемости сферы имеет следующий вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \sin^2 \theta + \varepsilon_z \cos^2 \theta & (\varepsilon_0 - \varepsilon_z) \sin \theta \cos \theta & 0 \\ (\varepsilon_0 - \varepsilon_z) \sin \theta \cos \theta & \varepsilon_0 \cos^2 \theta + \varepsilon_z \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пусть плоская линейно поляризованная волна с волновым вектором $k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1$ распространяется в обратном направлении оси z :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i_x E_0 \exp(ik_1 z + i\omega t), \\ \mathbf{H} &= -i_y H_0 \exp(ik_1 z + i\omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

где E_0 и H_0 — амплитуды волны, ω — циклическая частота. В дальнейших вычислениях временной множитель в (2) будем опускать.

Изучим влияние анизотропии кристалла на дифрагированное и рассеянное поля. Характерной величиной, описывающей интересующее нас влияние, является поперечное сечение рассеяния как функция от коэффициента анизотропии $p = \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}}$.

Решение

Известно, что электромагнитная волна в анизотропных средах распространяется в виде двух волн: обыкновенной и необыкновенной. Необыкновенная волна описывается уравнением

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_z \mu_z \right) \psi = 0, \quad (3)$$

где $\nabla_{\perp}^2$ — поперечная часть оператора ∇ , ψ — скалярная волновая функция. Уравнение обыкновенной волны можно получить из (3) формальной заменой $\varepsilon_z \rightarrow \varepsilon_0$. Внешняя волна, которая образуется из отраженной и преломленной от поверхности сферических волн, описывается уравнением, которое можно получить из (3) с помощью замен $\varepsilon_z \rightarrow \varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_1$, $\mu_z \rightarrow \mu_1$. Отмеченное сходство между уравнениями задачи дает нам возможность все дальнейшие вычисления проводить относительно уравнения (3). Полученные результаты легко обобщить на случай двух других волн с помощью вышеуказанных замен.

Решение уравнения (3) есть

$$\psi = \exp(ik_2 r), \quad (4)$$

где

$$|k_2| = |k_H| (\sin^2 \theta_2 + p^2 \cos^2 \theta_2)^{-1/2},$$

$$k_H^2 = \omega^2 \varepsilon_z \mu_z = p^2 k_0^2,$$

k_2 — волновой вектор необыкновенной волны, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ — волновой вектор обыкновенной волны, θ_2 — угол преломления необыкновенной волны в сферу.

Разложив функцию (4) в ряд по волновым сферическим функциям [5], получим

$$\psi = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} i^n (2 - \delta_{0m}) (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_2) \times \\ \times j_n(k_2 r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\Phi - \varphi_2), \quad (4a)$$

где $P_n^m(\cos \theta_2)$ — присоединенный полином Лежандра, $j_n(k_2 r)$ — сферическая функция Бесселя первого рода, δ_{0m} — символ Кронекера,

$$\operatorname{tg}^2 \theta_2 = p^{-2} \operatorname{tg}^2 \theta_0, \quad \operatorname{tg}^2 \varphi_2 = \operatorname{tg}^2 \varphi_0,$$

θ_0, φ_0 — сферические углы волнового вектора обыкновенной волны, φ_2 — азимутальный угол преломления необыкновенной волны (в связи с азимутальной симметрией задачи в дальнейшем будем брать $\varphi_2 = \varphi_0 = 0$ без потери общности).

Запишем общий член (4a) в следующем виде:

$$\psi_{mn}^{(h)} = A_{mn}(\theta_2) Z_n^{(h)}(k_2 r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\Phi, \quad (5)$$

где

$$A_{mn}(\theta_2) = 2i^n (2 - \delta_{0m}) (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_2),$$

$h = 1, 2, 3, 4$ указывает род бесселевой функций.

Решения векторного волнового уравнения, соответствующего уравнению (3), построим с помощью метода, предложенного в [2]. Однако в отличие от [2] мы в качестве постоянного вектора выберем не орт в направлении радиуса сферы, а декартовы орты $\hat{i}_x, \hat{i}_y$ и $\hat{i}_z$. Полученная таким образом система из шести векторных волновых функций заметно отличается от соответствующей системы в указанной монографии, однако с помощью несложных координатных преобразований интересные нас функции можно получить из [2]. Используемый здесь метод более удобен по сравнению с его аналогом в [2] при разложении отыскиваемых полей для случая анизотропной среды:

$$^x M_{mn}^{(h)} = \operatorname{rot}(\hat{i}_x \psi_{mn}^{(h)}), \quad (6)$$

где $x = x, y, z$. Так как в общем случае орт $\hat{i}_x$ является постоянным вектором, то определение (6) заметно упрощается:

$$^x M_{mn}^{(h)} = \nabla \psi_{mn}^{(h)} \times \hat{i}_x, \quad ^y M_{mn}^{(h)} = \nabla \psi_{mn}^{(h)} \times \hat{i}_y, \\ ^z M_{mn}^{(h)} = \nabla \psi_{mn}^{(h)} \times \hat{i}_z. \quad (6a)$$

После разложения падающей волны (2) по функциям (6a) получаем

$$^I E = \hat{i}_x E_0 \exp(ik_1 z) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{0n} {}^y M_{0n}^{(1)}, \quad (7)$$

$$^I H = -\hat{i}_y H_0 \exp(ik_1 z) = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{0n} {}^x M_{0n}^{(1)},$$

где

$$\bar{A}_{0n} = \frac{4 i^{n+1} (n+1) (2n-1)}{k_1 A_{0n}(\theta_1) (2n+1) (3n-1)}.$$

Поле внутри сферы после разложения по векторным волновым функциям (6а) имеет следующий вид:

$${}^T\mathbf{D} = D_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n {}^y\mathbf{M}_{0n}^{(1)}(k_2, r, \theta, \Phi) + \gamma_n {}^y\mathbf{M}_{0n}^{(1)}(k_0, r, \theta, \Phi) \}, \quad (8)$$

$${}^T\mathbf{H} = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n {}^x\mathbf{M}_{0n}^{(1)}(k_2, r, \theta, \Phi) + \gamma_n {}^x\mathbf{M}_{0n}^{(1)}(k_0, r, \theta, \Phi) \},$$

где ${}^T\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, а вне сферы поле есть

$${}^R\mathbf{E} = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} f_n {}^y\mathbf{M}_{0n}^{(4)}(k_1, r, \theta, \Phi), \quad (9)$$

$${}^R\mathbf{H} = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} [f_n {}^x\mathbf{M}_{0n}^{(4)}(k_1, r, \theta, \Phi) + \beta_n {}^x\mathbf{M}_{1n}^{(4)}(k_1, r, \theta, \Phi)].$$

В формулах (8) и (9) через α_n , β_n , γ_n и f_n обозначены неизвестные коэффициенты разложений, которые будут определены из граничных условий.

Нужно заметить, что отыскиваемые поля внутри и вне сферы, которые представлены в виде (8) и (9), являются функциями угла преломления θ для обыкновенных и необыкновенных волн. При рассмотрении вопроса о полной картине поля, возникающего вследствие дифракции волны, необходимо проинтегрировать (8) и (9) по θ в пределах $[0, \pi]$.

В качестве граничных условий выберем непрерывность тангенциальных составляющих полей:

$$[(\mathbf{E} + {}^R\mathbf{E}), \hat{r}] = [{}^T\mathbf{E}, \hat{r}], \quad (10)$$

$$[(\mathbf{H} + {}^R\mathbf{H}), \hat{r}] = [{}^T\mathbf{H}, \hat{r}],$$

где $\hat{r}$ — орт в направлении радиуса сферы. Умножим равенства (10) на $P_\nu(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ и проинтегрируем по θ в пределах $[0, \pi]$. В результате систему уравнений (10) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_n A_{0n}(\theta_2) P_{3\nu} + \gamma_n A_{0n}(\theta_0) P_{4\nu} - f_n A_{0n}(\theta_1) P_{2\nu} &= P_{1\nu} \bar{A}_{0n}, \\ \alpha_n A_{0n}(\theta_2) P_{7\nu} + \gamma_n A_{0n}(\theta_0) P_{8\nu} + f_n A_{0n}(\theta_1) P_{6\nu} &= -P_{5\nu} \bar{A}_{0n}, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n A_{0n}(\theta_2) P_{12\nu} + \gamma_n A_{0n}(\theta_0) P_{13\nu} - f_n A_{0n}(\theta_1) P_{10\nu} - \beta_n A_{1n}(\theta_1) P_{11\nu} &= P_{9\nu} \bar{A}_{0n}, \\ \alpha_n A_{0n}(\theta_2) P_{17\nu} + \gamma_n A_{0n}(\theta_0) P_{18\nu} - f_n A_{0n}(\theta_1) P_{15\nu} + \beta_n A_{1n}(\theta_1) P_{16\nu} &= P_{14\nu} \bar{A}_{0n}, \end{aligned}$$

где ν пробегает значения от 0 до ∞ .

В отличие от системы дифференциальных уравнений в работе [4] (10) является бесконечной системой линейных алгебраических уравнений. На первый взгляд (10а) может создать определенные трудности для дальнейших численных расчетов. Однако из физики задачи следует, что неизвестные коэффициенты разложений полей зависят от $k_1 r_0$, а ряды сходятся при всех его значениях. Исходя из этого число членов рядов нужно определять значениями $k_1 r_0$, в частности, суммирование необходимо проводить до $n \approx n_0 = k_1 r_0$. Эти соображения заметно способствуют упрощению численных расчетов.

В системе уравнений (10а) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_{7nv} &= -\bar{\varepsilon} \left[k_2 \dot{Z}_n^{(1)}(k_2 r_0) J_{4nv} - \frac{1}{r_0} Z_n^{(1)}(k_2 r_0) J_{5nv} \right], \\ P_{11nv} &= -k_1 \dot{Z}_n^{(4)}(k_1 r_0) J_{6nv} - \frac{1}{r_0} Z_n^{(4)}(k_1 r_0) J_{7nv}, \\ P_{12nv} &= k_2 \dot{Z}_n^{(1)}(k_2 r_0) J_{1nv} - \frac{1}{r_0} Z_n^{(1)}(k_2 r_0) J_{2nv}, \\ P_{16nv} &= -\frac{1}{r_0} Z_n^{(1)}(k_2 r_0) J_{8nv}, \\ P_{17nv} &= k_2 \dot{Z}_n^{(1)}(k_2 r_0) J_{3nv}, \quad \bar{\varepsilon} = D_0/E_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$P_{1nv} = \varepsilon_0 P_{12nv}$, $P_{9nv} = P_{12nv}$, $P_{3nv} = \varepsilon_0 P_{12nv}$, $P_{14nv} = -\varepsilon_0 \varepsilon_z P_{7nv}$, $P_{4nv} = P_{17nv}$ ($k_2 \rightarrow k_1$), остальные величины получаются: P_{4nv} из P_{3nv} , P_{8nv} из P_{7nv} , P_{13nv} из P_{12nv} и P_{18nv} из P_{17nv} заменой $k_2 \rightarrow k_0$, а P_{2nv} из P_{1nv} , P_{6nv} из P_{5nv} , P_{10nv} из P_{9nv} и P_{15nv} из P_{14nv} заменой $Z_n^{(1)}(k_1 r_0) \rightarrow Z_n^{(4)}(k_1 r_0)$. Через J_{jnv} ($j = 1, 2, \dots, 8$) обозначены следующие интегралы:

$$\begin{aligned} J_{3nv} &= \int_{-1}^1 P_n(\eta) P_v(\eta) d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq v \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n=v, \end{cases} \\ J_{1nv} &= \frac{n+1}{2n+1} J_{3(n+1)v} + \frac{n}{2n+1} J_{3(n-1)v}, \\ J_{2nv} &= \frac{n(n+1)}{2n+1} [J_{3(n+1)v} - J_{3(n-1)v}], \\ J_{4nv} &= \varepsilon_0 J_{3nv} + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \left[\frac{n+1}{2n+1} J_{1(n+1)v} + \frac{n}{2n+1} J_{1(n-1)v} \right], \\ J_{5nv} &= \frac{(\varepsilon_z - \varepsilon_0)n}{2n+1} [-2n J_{1(n-1)v} + (n+1) J_{1(n+1)v}], \\ J_{6nv} &= \frac{n}{2n+1} [(n+1) J_{3(n+1)v} - 2n J_{3(n-1)v}], \\ J_{7nv} &= n^2 \left[\frac{n+1}{2n+1} J_{3(n+1)v} + \frac{n}{2n+1} J_{3(n-1)v} \right] - J_{3(n-1)v}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$J_{8n\nu} = \int_{-1}^1 P_{\nu}(\eta) \frac{dP_n(\eta)}{d\eta} \eta d\eta = \begin{cases} \frac{2k}{2k+1} & \text{при } n=\nu=k \\ 2 & \text{при } n=k+2, \nu=k \\ 0 & \text{при } n=k, \nu=k+2 \\ & k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Вначале необходимо рассмотреть внешнее поле (9) в дальней зоне. С этой целью совершим предельный переход $k_1 r \rightarrow \infty$. В этом пределе функции (6а) принимают следующий вид:

$$^1M_{0n}^{(4)} \approx A_{0n}(\theta_1) i^n [\sin \Phi \hat{i}_\theta + \cos \theta \cos \Phi \hat{i}_\phi] P_n(\cos \theta) \frac{1}{r} \exp(-ik_1 r),$$

$$^2M_{1n}^{(4)} \approx A_{1n}(\theta_1) i^n \sin \theta \cos \Phi \hat{i}_\phi P_n^1(\cos \theta) \frac{1}{r} \exp(-ik_1 r).$$

Используя приведенные предельные выражения для функций (6а) и формулы преобразования координат, поле (9) запишем в декартовых осях:

$$\begin{aligned} ^R\mathbf{H} \cong H_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n [\beta_n A_{1n}(\theta_1) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta \sin \Phi \cos \Phi \hat{i}_x + \\ + [f_n A_{0n}(\theta_1) P_n(\cos \theta) \cos \theta - \beta_n A_{1n}(\theta_1) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta \cos^2 \Phi] \hat{i}_y - \\ - f_n A_{0n}(\theta_1) P_n(\cos \theta) \sin \theta \sin \Phi \hat{i}_z] \frac{1}{r} \exp(-ik_1 r). \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью известных формул для поперечного сечения рассеяния в точке $\theta = 0$, $\Phi = 0$ нами окончательно получена следующая формула:

$$\sigma = \frac{4}{(k_1 r_0)^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} i^n A_{0n}(\theta_1) f_n(p). \quad (14)$$

Подставляя в полученные формулы $\varepsilon_0 = \varepsilon_z = \varepsilon$, получим результаты работы [6].

Надо отметить, что зависимость σ от коэффициента анизотропии p получилась довольно сложной, что создает определенные трудности для численных расчетов. Эти трудности можно успешно преодолеть, если, как было отмечено выше, ряды в (10а) и (14) оборвать на значении $n \approx n_0 = k_1 r_0$, что и делается обычно при численных расчетах.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 26. IV. 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов. Дифракция электромагнитных волн на двух телах, Изд. Наука и техника, Минск, 1968.
2. Дж. А. Стреттон. Теория электромагнетизма, Огиз, 1948.
3. А. Г. Гуревич. Ферриты в СВЧ полях, Физматгиз, 1960.

4. К. П. Черкасова, М. И. Ломоносов, А. Хижняк. Изв. ВУЗ, Радиофизика, 20, 913 (1977).
5. Н. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов. Сфероидальные и кулоновские функции, Изд. Наука, М., 1976.
6. К. М. Siegel et al. Trans. IRE, AP-3, 4, 266 (1956).

ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՆ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍՖԵՐԱՅԻ ՎՐԱ

Ս. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԵՍՅԱՆ, Վ. Ա. ԲԱՐԵԳԱՄՅԱՆ

Դիտարկված է դժախտորեն բևեռացված էլեկտրամագնիսական հարթ ալիքի դիֆրակցիայի բևեռված սֆերիկ անիզոտրոպ մարմնի վրա: Ստացված են սֆերայի ներսում և դրսում առաջացած դաշտերի արտահայտությունները: Դուրս է բերված ցրման կտրվածքի կախումը անիզոտրոպության դրժակցից:

THE DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON AN ANISOTROPIC SPHERE

S. S. HOVHANNESIAN, V. A. BAREGAMIAN

The problem of the diffraction of a plane electromagnetic wave on an anisotropic sphere is considered. The Maxwell equations for an anisotropic medium are solved by the method of construction of spherical vector functions. The effect of anisotropy on the scattered and diffracted fields has been studied and the scattering cross section has been calculated.