

ОБОБЩЕННАЯ БИМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Р. М. АВАКЯН, Б. В. ХАЧАТРЯН, Э. В. ЧУБАРИАН

Предложен вариант обобщенной теории гравитации Розена. Показано, что уравнения поля вне распределения масс можно проинтегрировать независимо от конкретного вида функции $F(\chi)$, входящей в плотность лагранжиана. В случае $F(\chi) = 1$ найдены аналитические выражения для компонент метрического тензора и скалярного поля χ .

В работах [1, 2] Дираком была выдвинута гипотеза о медленном изменении со временем гравитационной постоянной. Исходя из представлений Дирака Иордан [3] создал вариант обобщенной теории гравитации. В дальнейшем в работах Саакяна и Мнацаканяна [4] теория Иордана была развита таким образом, чтобы не вступить в противоречие с известными астрономическими наблюдениями. На основе этой теории были рассчитаны параметры барионных конфигураций, и оказалось, что этот вариант теории допускает существование компактных объектов со сколь угодно большими массами.

Отсутствие массивных компактных объектов в теории Эйнштейна обычно связывают с наличием сингулярности при $r = r_g$ в решении Шварцшильда. Однако и в биметрической теории, предложенной Розеном [5], такие объекты также отсутствуют, несмотря на то, что внешнее решение для точечной массы не имеет сингулярности [6—9]. С этой точки зрения интересно рассмотреть вариант биметрической теории Розена с гравитационной переменной.

1. В дальнейшем удобно вместо G ввести безразмерную величину $\kappa = G/G_0$ ($G_0 = 6,67 \cdot 10^{-8}$ дин·см²·г⁻² — ньютоновская гравитационная постоянная). В интересующем нас случае полное действие можно записать в виде

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_0} \int \left[\frac{L_s}{\kappa} + \frac{L_g}{\kappa} + \frac{G_0}{c^4} L_m + L_\chi \right] d\Omega. \quad (1)$$

Здесь $L_s = \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} S^{\lambda\mu\nu\sigma} P_{\lambda\mu\nu\sigma}$ — плотность лагранжиана плоского пространства,

$$L_g = \sqrt{-\gamma} \left[\frac{1}{4} g^{\lambda\rho} g^{\sigma\tau} g_{\lambda\sigma|\alpha} g_{\rho\tau|\alpha} - \frac{1}{8} g^{\lambda\rho} g^{\sigma\tau} g_{\lambda\rho|\alpha} g_{\sigma\tau|\alpha} \right] \quad (2)$$

$$(g_{\rho\tau|\alpha} = g_{\rho\tau|\beta} \gamma^{\alpha\beta})$$

есть плотность лагранжиана гравитационного поля, L_m — плотность лагранжиана материи, не зависящая от $\gamma_{\mu\nu}$, а L_χ — плотность лагранжиана, описывающего поле χ .

При выборе L_x мы будем руководствоваться следующими требованиями: во-первых, она должна быть однородной функцией нулевого порядка по $g_{\mu\nu}$, во-вторых, поднятие и опускание индексов дифференцирования должно производиться только при помощи $\gamma_{\mu\nu}$ [5], в-третьих, как и всякая плотность лагранжиана, L_x должна зависеть от x и его первых производных, и, наконец, постоянные, вводимые в теорию, должны быть безразмерными. Вышеуказанным требованиям удовлетворяет лагранжиан

$$L_x = \zeta \sqrt{-\gamma} F(x) x_\alpha x_\alpha, \quad (3)$$

где ζ — безразмерный параметр теории, а $F(x)$ — некоторая функция от x . Эта функция пока остается произвольной ввиду отсутствия соответствующих наблюдательных данных, позволяющих конкретизировать ее вид.

Равенство нулю вариаций полного действия по x и по $g_{\mu\nu}$ дает соответственно уравнения поля x и гравитационного поля, а из требования равенства нулю вариации L_m при бесконечно малом координатном преобразовании $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ получаем уравнения движения. В результате имеем

$$L_g \equiv \frac{L_g}{\sqrt{-\gamma}} = -\zeta x^2 \left[\frac{dF}{dx} x_l x_l + 2 F x_{ll} \right], \quad (4)$$

$$N_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{x_l}{x} g_{\mu\nu|l} = - \frac{8\pi G_0}{c^4} x k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (5)$$

$$T_{\mu;\nu} = 0, \quad (6)$$

где введены обозначения:

$$N_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu| \alpha\alpha} - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\mu\lambda| \alpha} g_{\nu\rho| \alpha}, \quad (7)$$

$k = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$, а $T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ — тензор энергии-импульса материи.

2. В случае статического сферически-симметричного распределения материи метрики ds^2 и $d\sigma^2$ можно записать в виде

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} c^2 dt^2 - e^{2\psi(r)} dr^2 - r^2 e^{2\eta(r)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Тогда уравнения полей (4) и (5) и уравнения гидродинамики (6) примут вид

$$\Phi'' + \frac{2}{r} \Phi' - \frac{x'}{x} \Phi' = \frac{4\pi G_0}{c^4} x (\rho + 3P) e^{\Phi+3\psi}, \quad (8)$$

$$\psi'' + \frac{2}{r} \psi' - \frac{x'}{x} \psi' = - \frac{4\pi G_0}{c^4} x (\rho - P) e^{\Phi+3\psi}, \quad (9)$$

$$\Phi'^2 + 3\psi'^2 - \frac{1}{2}(\Phi' + 3\psi')^2 = \kappa^2 \left[\frac{dF}{dx} \kappa'^2 - 2F \left(\kappa'' + \frac{2}{r} \kappa' \right) \right], \quad (10)$$

$$P' = -(\rho + P)\Phi'. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что $\psi(r) \equiv \eta(r)$ во всем пространстве [7], что при получении уравнений уже было учтено. Для замкнутости системы (8)–(11) к ней необходимо добавить уравнение состояния

$$P = P(\rho). \quad (12)$$

Вне распределения масс из уравнений (8) и (9) имеем

$$\Phi' = \frac{G_0}{c^2} \frac{C_1 \kappa(r)}{r^2}, \quad \psi' = -\frac{G_0}{c^2} \frac{C_2 \kappa(r)}{r^2}, \quad (13)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Подстановка этих решений в (10) дает

$$\frac{dF}{dx} \kappa'^2 - 2F \left(\kappa'' + \frac{2}{r} \kappa' \right) = \frac{A}{r^4}, \quad (14)$$

где

$$A = \frac{G_0^2}{c^4} \left[C_1^2 + 3C_2^2 - \frac{1}{2}(C_1 - 3C_2)^2 \right]. \quad (15)$$

Уравнение (14) можно записать в виде

$$\left(\frac{r^2 \kappa'}{\sqrt{F}} \right)' = -\frac{A}{2r^2 F^{3/2}}. \quad (16)$$

Введем функцию $u = r^2 \kappa' F^{-1/2}$ и перейдем к независимой переменной κ . Тогда (16) примет вид

$$\frac{du^2}{d\kappa} = -\frac{A}{F^2}, \quad (17)$$

откуда

$$C_4 - \frac{1}{r} = \int \frac{d\kappa}{\sqrt{C_3 F - A F \int \frac{d\kappa}{F^2}}}. \quad (18)$$

Условие $\kappa \rightarrow 1$ ($G \rightarrow G_0$) при $r \rightarrow \infty$ дает определенную связь между постоянными интегрирования C_2 и C_1 . Выбирая конкретный вид $F(\kappa)$, из уравнения (18), в принципе, можно получить $\kappa(r)$, а из (13) — функции $\Phi(r)$ и $\psi(r)$, причем появляющиеся при этом новые постоянные интегрирования равны нулю, так как $\Phi(\infty) = \psi(\infty) = 0$.

При решении внутренней задачи необходимо задать в центре конфигурации значения плотности (или давления) $\Phi(0)$, $\psi(0)$ и $\kappa(0)$ (из уравнений (8)–(10) следует, что $\Phi'(0) = \psi'(0) = \kappa'(0) = 0$). Необходимо, однако, отметить, что все характеристики конфигурации должны определяться одним параметром (плотностью или давлением в центре). Это означает, что остальные величины $\Phi(0)$, $\psi(0)$ и $\kappa(0)$ нельзя задавать про-

извольно. Поэтому при интегрировании уравнений, определяющих внутреннюю структуру конфигурации, необходимо путем повторных интегрирований найти те значения $\Phi(0)$, $\psi(0)$ и $\kappa(0)$, при которых обеспечивается непрерывность функций и их производных на границе конфигурации, определяемой условием $P(R) = 0$, и путем сшивки внутреннего и внешнего решений определить постоянные интегрирования, входящие во внешнее решение.

3. В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда $F(\kappa) = 1$. Тогда из (18) следует, что

$$\kappa = \frac{C_3}{A} - \frac{AC_1^2}{4} + \frac{AC_4}{2r} - \frac{A}{4r^2}.$$

Так как $\kappa(\infty) = 1$, то

$$\kappa = 1 + \frac{AC_4}{2r} - \frac{A}{4r^2}. \quad (19)$$

Соответственно из (13) для Φ и ψ вне распределения масс находим

$$\Phi = -\frac{C_1 G_0}{c^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{AC_4}{4r^2} - \frac{A}{12r^3} \right), \quad (20)$$

$$\psi = \frac{C_2 G_0}{c^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{AC_4}{4r^2} - \frac{A}{12r^3} \right). \quad (21)$$

Покажем, что постоянные интегрирования C_1 и C_2 связаны с массами конфигурации. С этой целью подставляя в уравнения (8) и (9)

$$\Phi' = \frac{G_0}{c^2} \frac{m_1(r) \kappa(r)}{r^2}, \quad \psi' = -\frac{G_0}{c^2} \frac{m_2(r) \kappa(r)}{r^2}, \quad (22)$$

получаем

$$m_1' = \frac{4\pi r^2}{c^2} (\rho + 3P) e^{\Phi+3\psi}, \quad (23)$$

$$m_2' = \frac{4\pi r^2}{c^2} (\rho - P) e^{\Phi+3\psi}.$$

Сравнивая (22) с (13) и имея в виду (23), находим

$$C_1 = m_1(R) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^R r^2 (\rho + 3P) e^{\Phi+3\psi} dr, \quad (24)$$

$$C_2 = m_2(R) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^R r^2 (\rho - P) e^{\Phi+3\psi} dr,$$

где R — радиус конфигурации.

Условия непрерывности κ и κ' на границе конфигурации позволяют определить постоянные C_3 и C_4 , однако при произвольно заданном $\kappa(0)$

соотношение $C_3 = A + \frac{A^2 C_1^2}{4}$, обеспечивающее условие $\kappa(\infty) = 1$, может не выполняться. Поэтому правильное значение κ в центре конфигурации должно быть найдено путем пробных интегрирований. Аналогичная ситуация возникает при сшивке метрических коэффициентов и их производных. После определения постоянных C_1 и C_2 из условия непрерывности Φ' и ψ' сами функции Φ и ψ сошьются лишь в том случае, если случайно правильно были выбраны значения $\Phi(0)$ и $\psi(0)$.

Для определения истинных значений $\Phi(0)$ и $\psi(0)$ поступим следующим образом. Сделаем преобразование $r = ax$, $u = \Phi - \Phi(0)$, $v = \psi - \psi(0)$, причем выберем a так, чтобы $a^2 e^{\Phi(0) + 3\psi(0)} = 1$. Тогда система уравнений (8) — (11) примет вид

$$u'' + \frac{2}{x} u' - \frac{x'}{x} u' = \frac{4\pi G_0}{c^2} (\rho + 3P) e^{u+3v},$$

$$v'' + \frac{2}{x} v' - \frac{x'}{x} v' = -\frac{4\pi G_0}{c^2} (\rho - P) e^{u+3v},$$

$$u'^2 + 3v'^2 - \frac{1}{2}(u' + 3v')^2 = \zeta x^2 \left[\frac{dF}{dx} x^2 - 2F \left(x'' + \frac{2}{x} x' \right) \right],$$

$$P' = -(P + \rho) u'.$$

Для u и v имеем начальные условия $u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0$. После сшивки решений получаем значения $u(\infty)$ и $v(\infty)$. Учитывая что $u(\infty) = \Phi(\infty) - \Phi(0) = -\Phi(0)$ и $v(\infty) = \psi(\infty) - \psi(0) = -\psi(0)$ находим истинные значения: $\Phi(0) = -u(\infty)$ и $\psi(0) = -v(\infty)$, а также значение $a^2 = e^{u(\infty) + 3v(\infty)}$.

Авторы благодарны проф. Г. С. Саакяну и участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за многочисленные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10. VI. 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. M. Dirac. Nature, 139, 323 (1937).
2. P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. (A), 165, 199 (1938).
3. P. Jordan. *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, 1955.
4. Г. С. Саакян. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Изд. Наука, М., 1972.
5. N. Rosen. Ann. Phys. (N. Y.), 84, 445 (1974).
6. N. Rosen, J. Rosen. Appl. J., 212, 605 (1977).
7. Г. С. Саакян и др. *Астрофизика*, 14, 489 (1978).
8. А. В. Саркисян, Б. В. Хачатрян, Э. В. Чубарян. *Астрофизика*, 15, 506 (1979).
9. А. В. Саркисян. *Астрономический журнал*, 57, 43 (1980).

Առաջարկված է դրավիտացիայի Ռոզենի տեսության ընդհանրացված տարբերակ: Ցույց է տրված, որ նյութի բաշխումից դուրս հավասարումները հաշվովում է ինտեգրել, անկախ լազրանժիանի խտության մեջ մտնող $F(\chi)$ ֆունկցիայի կոնկրետ տեսքից: $F(\chi)=1$ դեպքում մետրիկական թենզորի կոմպոնենտների և χ սկալար դաշտի համար գտնված են անալիտիկ արտահայտություններ:

GENERALIZED BIMETRIC THEORY OF GRAVITATION

R. M. AVAKIAN, B. V. KHACHATRIAN, E. V. CHUBARIAN

A variant of the generalized Rosen gravitation theory is proposed. It is shown that the field equations are integrable out of mass distribution irrespective of the concrete form of the $F(\chi)$ function which enters into the Lagrange density function. Analytic expressions for metric tensor components and the χ scalar field for the $F(\chi)=1$ case are found.