

СЛЕДСТВИЯ ОДНОРОДНОСТИ И ИЗОТРОПНОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В. А. ДЖРБАШЯН

Показывается, что полная волновая функция произвольной свободной частицы преобразуется как по представлению группы трансляций, так и по представлению группы вращений в четырехмерном пространстве в силу того, что свободное пространство однородно и изотропно одновременно. Сохранение физических величин получается из требования постоянства плотности вероятности при преобразованиях параллельного переноса и вращения. Наряду с получением известного следствия однородности четырехмерного пространства—сохранения энергии и импульса—доказывается, что следствием изотропности трехмерного пространства является сохранение неизвестного ранее полного момента количества движения. Последний равен сумме моментов, связанных с изменением углов, определяющих направления радиуса-вектора, импульса и спина, при вращении трехмерной системы координат. Следствием изотропности подпространства — «плоскости», образованной осью времени и направлением движения, является сохранение спиральности частиц, описываемых уравнением Вейля. В случаях, когда по физически понятным причинам локальная вероятность не сохраняется, имеет место сохранение лишь интегральной вероятности (нормировки). Получены неизвестные ранее выражения для полных операторов вращения.

§ 1. Сохранение энергии и импульса

Приведем сначала доказательство хорошо известных законов сохранения энергии и импульса. Рассмотрим однородность четырехмерного пространства, означающую эквивалентность всех положений, получающихся друг из друга параллельным переносом.

Волновую функцию свободной частицы после бесконечно малого параллельного переноса можно выразить через начальную функцию следующим образом:

$$\psi(t + \delta t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = (1 + \delta t \partial/\partial t + \delta \mathbf{r} \nabla) \psi(t, \mathbf{r}). \quad (1)$$

Введя операторы энергии и импульса $H = i\hbar \partial/\partial t$ и $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla$, из (1) при параллельном переносе на конечные расстояния $\tau = t' - t$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ (разложением в ряд Тейлора) получим

$$\psi(t', \mathbf{r}') = T \psi(t, \mathbf{r}), \quad (2)$$

где

$$T = e^{-i(\tau H - \mathbf{r} \mathbf{P})/\hbar} \quad (3)$$

есть оператор трансляции.

Из однородности пространства следует постоянство плотности вероятности при параллельном переносе, т. е.

$$|\psi(t', r')|^2 = |\psi(t, r)|^2. \quad (4)$$

Следовательно функция $\psi(t', r')$ может отличаться от $\psi(t, r)$ лишь постоянным фазовым множителем. Записав этот множитель в виде $e^{-i(\tau E - \rho P)/\hbar}$, где E и P — постоянные, получим

$$e^{-i(\tau E - \rho P)/\hbar} \psi_{E, P}(t, r) = e^{-i(\tau E - \rho P)/\hbar} \psi_{E, P}(t, r), \quad (5)$$

т. е. сохранение энергии и импульса свободных частиц:

$$H\psi_{E, P}(t, r) = E\psi_{E, P}(t, r), \quad P\psi_{E, P}(t, r) = P\psi_{E, P}(t, r). \quad (6)$$

Из выражений (2), (3) и (5) следует, что ψ преобразуется по неприводимому представлению группы трансляций.

§ 2. Сохранение полного момента

Рассмотрение изотропности пространства, т. е. эквивалентности всех направлений в нем, несколько сложнее. Ограничимся пока вращениями в трехмерном координатном пространстве.

Особенность здесь заключается в том, что мы вместо одного вектора должны рассматривать три вектора: r , p , s . Действительно, p и s являются векторами соответственно в импульсном и спиновом пространствах. Но наряду с этим они имеют определенные направления и в координатном пространстве. При вращении системы координат на угол $\delta\varphi$ все три вектора окажутся повернутыми в новой системе на угол $\delta\varphi$. Этот факт следует также из инвариантности скалярных произведений (rp) и (rs) при поворотах (поскольку r вращается, p и s должны также вращаться, чтобы эти произведения не изменялись).

Учтем, что $\delta r = [\delta\varphi r]$, $\delta p = [\delta\varphi p]$, и примем во внимание известное свойство волновой функции при повороте спина. Тогда в новой системе после поворота волновая функция, зависящая от векторов r , p и s , запишется в виде

$$\begin{aligned} \psi(r + \delta r, p + \delta p, s + \delta s) &= (1 + [\delta\varphi r] \nabla_r + [\delta\varphi p] \nabla_p + \delta\varphi is/\hbar) \times \\ &\times \psi(r, p, s) = [1 + \delta\varphi ([r \nabla_r] + [p \nabla_p] + is/\hbar)] \psi(r, p, s). \end{aligned} \quad (7)$$

Введем оператор полного момента

$$J = L' + L^p + s, \quad (8)$$

где $L' = -i\hbar [r \nabla_r]$, $L^p = -i\hbar [p \nabla_p]$, s — оператор спина. Оператор L действует на углы ϑ_p и φ_p , определяющие направление импульса в трехмерном координатном пространстве.

При вращении на угол φ вокруг произвольного направления, выбранного в качестве оси z , из (7) получаем

$$\psi(r', p', s') = R_z \psi(r, p, s), \quad (9)$$

где

$$R_z = e^{i\varphi J_z/\hbar} \quad (10)$$

есть оператор вращения. Из изотропности пространства следует постоянство плотности вероятности при вращении, т. е.

$$|\psi(r', p', s')|^2 = |\psi(r, p, s)|^2. \quad (11)$$

Следовательно $\psi(r', p', s')$ может отличаться от $\psi(r, p, s)$ лишь постоянным фазовым множителем. Записав этот множитель в виде $e^{i\varphi}$, получим

$$e^{i\varphi} \psi(r, p, s) = e^{i\varphi} \psi(r, p, s). \quad (12)$$

Из (12) следует сохранение проекции полного момента (8) для свободных частиц

$$J_z \psi_\mu(r, p, s) = \hbar \mu \psi_\mu(r, p, s). \quad (13)$$

Используя метод теории момента количества движения с оператором L' [1], можно показать, что из определения (8) и соотношения (13) следуют также сохранение квадрата оператора J

$$J^2 \psi_\mu(r, p, s) = \hbar^2 J(J+1) \psi_\mu(r, p, s), \quad (14)$$

где $\mu = -J, (-J+1) \dots J-1, J$, и соотношения

$$J_q \psi_\mu = [J(J+1)]^{1/2} \sum_{\mu'} \langle J, \mu | J_q | J, \mu' \rangle \psi_{\mu'}, \quad (15)$$

где $q = -1, 0, 1$, $J_0 = J_z$, $J_{\pm 1} = \mp (J_x \pm iJ_y)/\sqrt{2}$. Из выражений (9), (10) и (12) следует, что ψ_μ представляют собой базис неприводимого представления группы вращений. Для свободных частиц $J=s$.

Заметим, что при вращении вокруг осей x или y для волновой функции, удовлетворяющей (13), не имеет места постоянство плотности вероятности. Это обстоятельство связано с некоммутативностью вращений вокруг осей x и z (или y и z) на произвольные углы. Действительно, при поворотах на углы $\pi/2$ в правой системе координат положительное направление оси z перейдет в положительное направление оси x при последовательных операциях вокруг осей z и x и в отрицательное направление оси y при операциях в обратной последовательности. Следствием некоммутативности операций вращений является некоммутативность операторов проекций полного момента J_x, J_y, J_z , вытекающая из (15). Если бы неизменность локальной вероятности (11) одновременно с R_z имела бы место и для R_x , то в результате вращений $R_z R_x$ или $R_x R_z$ мы получили бы одну и ту же функцию, независимо от углов вращения, т. е. мы должны были бы прийти к одному и тому же направлению, что не имеет места согласно сказанному выше.

Таким образом, при повороте вокруг произвольного направления для собственной функции ψ_μ оператора J_z имеет место лишь более слабое по сравнению с (11) хорошо известное (см., например, [2, 3]) условие сохранения полной вероятности

$$\sum \int |\psi(r', p', s')|^2 dr' = \sum \int |\psi(r, p, s)|^2 dr, \quad (16)$$

где суммирование проводится по переменным спиновой части.

Следствием (16) является унитарность действующего на $\psi_{J\mu}$ оператора вращения вокруг произвольного (вообще говоря не совпадающего с осью z) направления:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar},$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \psi_{J\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^J(\alpha, \beta, \gamma) \psi_{J\mu'}. \quad (17)$$

Здесь α, β, γ — углы Эйлера, D -функции определяют матрицу вращения. Из (8), (10) и (17) следует, что

$$R = R^r \cdot R^p \cdot R^s, \quad (18)$$

где R^r, R^p и R^s отличаются от R заменой J соответственно на L^r, L^p и s , т. е. оператор вращения можно представить в виде произведения трех операторов, действующих на радиус-вектор, импульс и спин. Таким образом, из изотропности трехмерного пространства следует сохранение физических величин — квадрата полного момента и его проекции. Отсюда следует также сохранение проекции спина на направление движения. Волновые функции всех свободных частиц и частиц в центрально-симметричном поле при вращениях в трехмерном пространстве преобразуются по неприводимым представлениям группы SO_3 , генерируемым оператором (8). Для каждого типа частиц в этом можно убедиться непосредственным рассмотрением волновых функций.

Собственные значения J^2 и J_z , а также оператор и матрицу конечных вращений мы рассмотрим на примере известного решения свободного уравнения Дирака. Здесь уместно упомянуть о замечании Вигнера относительно невозможности доказательства того, что это решение преобразуется по неприводимому представлению группы вращений, исходя из традиционного подхода $J = L^r + s$ [3].

§ 3. Решения уравнения Дирака как базис представления группы вращений. Биспин

В этом параграфе, независимо от способа общего рассмотрения в § 2, мы покажем, что для свободных частиц, описываемых уравнением Дирака, 1) J_z и J^2 сохраняются, 2) волновые функции являются базисом представления группы вращений, генерируемого оператором (8).

В решении уравнения Дирака [4]

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} u_\mu \exp [i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)/\hbar] \quad (19)$$

u_μ -биспинор есть четырехкомпонентная величина, которая при $E > 0$ записывается в виде

$$u_\mu = N \begin{pmatrix} v_\mu \\ w_\mu \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $N = [(1 + Mc^2/E)/2]^{1/2}$, v_μ — собственная функция оператора спина $s_z v_\mu(\lambda) = \hbar \mu v_\mu(\lambda)$, λ — спинорный индекс, $v_\mu(\lambda) = \delta_{\mu\lambda}$,

$$w_\mu(\lambda) = \frac{2c(\text{sp})}{\hbar(E + Mc^2)} v_\mu(\lambda). \quad (21)$$

Используя обозначения $s_0 = s_z$, $s_{\pm 1} = \mp (s_x \pm is_y)/\sqrt{2}$ и учитывая, что

$$\begin{aligned} (\text{sp}) v_\mu(\lambda) &= \sum_{\sigma} (\text{sp})_{\sigma\mu} v_\sigma(\lambda) = \sum_{m, \sigma} [(-1)^m s_{-m} p_m]_{\sigma\mu} v_\sigma(\lambda) = \\ &= \sum_{m, \sigma} [(-1)^m s_{-m} p \sqrt{4\pi/3} Y_{1m}(\vartheta_p, \varphi_p)]_{\sigma\mu} v_\sigma(\lambda) = \sqrt{4\pi/3} p \times \\ &\times \sum_{m, \sigma} (-1)^m (s_{-m})_{\sigma\mu} Y_{1m}(\vartheta_p, \varphi_p) v_\sigma(\lambda) = \sqrt{\pi} \hbar p \times \\ &\times \sum_{m, \sigma} \langle 1/2 \sigma, 1 m | 1/2 \mu \rangle Y_{1m}(\vartheta_p, \varphi_p) v_\sigma(\lambda), \end{aligned} \quad (22)$$

где $p = |\mathbf{p}|$, ϑ_p и φ_p — углы, определяющие направление импульса, $\langle 1/2 \sigma, 1 m | 1/2 \mu \rangle$ — коэффициент векторного сложения, на основе выражений (20) и (21) биспинор можно представить в виде [5]

$$u_\mu(L, \lambda) = \sqrt{2\pi[1 + (-1)^L/\gamma]} \sum_{m, \sigma} \langle s\sigma, Lm | j\mu \rangle Y_{Lm}(\vartheta_p, \varphi_p) v_\sigma(\lambda). \quad (23)$$

Здесь $L = 0, 1$, $\lambda = 1/2, -1/2$, $s = j = 1/2$, $\gamma = E/Mc^2$.

Условие ортонормированности принимает вид

$$\sum_{L, \lambda} u_{\mu'}^*(L, \lambda) u_\mu(L, \lambda) = \delta_{\mu'\mu}. \quad (24)$$

Воспользуемся известным разложением плоской волны по сферическим функциям

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} = \sum_{L_1 m_1} g_{L_1}(pr/\hbar) (-1)^{m_1} Y_{L_1 - m_1}(\vartheta_p, \varphi_p) Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r, \varphi_r), \quad (25)$$

где радиальная функция $g_L(pr/\hbar)$ равна

$$g_{L_1}(pr/\hbar) = (2\pi)^{3/2} i^{L_1} \frac{J_{L_1+1/2}(pr/\hbar)}{\sqrt{pr/\hbar}}, \quad (26)$$

$J_{L+1/2}(z)$ — функция Бесселя.

Подставляя (23) и (25) в выражение (19) и учитывая, что

$$\begin{aligned} Y_{Lm}(\vartheta_p, \varphi_p) Y_{L_1 - m_1}(\vartheta_p, \varphi_p) &= \sum_{L_2 m_2} \left[\frac{(2L+1)(2L_1+1)}{4\pi(2L_2+1)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \langle L0, L_1 0 | L_2 0 \rangle \langle Lm, L_1 - m_1 | L_2 m_2 \rangle Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p, \varphi_p), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (-1)^{m_1} \langle Lm, L_1 - m_1 | L_2 m_2 \rangle &= (-1)^{L_1} (2L_2+1)^{1/2} (2L+1)^{-1/2} \times \\ &\times \langle L_1 m_1, L_2 m_2 | Lm \rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

выразим волновую функцию через ряды Клебша-Гордана

$$\begin{aligned} \psi_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{L_1 L_2} (-1)^{L_1} [1 + (-1)^{L/\gamma}] (2L_1 + 1)/2^{1/2} \langle L_0, L_1 0 | L_2 0 \rangle \times \\ \times g_{L_1} (pr/\hbar) \sum_{m\sigma} \langle s\sigma, Lm | J\mu \rangle v_{\sigma}(\lambda) \sum_{m_1 m_2} \langle L_1 m_1, L_2 m_2 | Lm \rangle \times \\ \times Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p, \varphi_p) \exp(-iEt/\hbar). \end{aligned} \quad (29)$$

Функции $Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r, \varphi_r)$, $Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p, \varphi_p)$ и $v_{\sigma}(\lambda)$ являются собственными функциями квадрата и третьей проекции операторов моментов количества движения L' , L'' и s :

$$L_q' Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r, \varphi_r) = [L_1(L_1 + 1)]^{1/2} \sum_{m_1'} \langle L_1 m_1, 1q | L_1 m_1' \rangle Y_{L_1 m_1'}(\vartheta_r, \varphi_r), \quad (30)$$

$$L_q'' Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p, \varphi_p) = [L_2(L_2 + 1)]^{1/2} \sum_{m_2'} \langle L_2 m_2, 1q | L_2 m_2' \rangle Y_{L_2 m_2'}(\vartheta_p, \varphi_p), \quad (31)$$

$$s_q v_{\sigma}(\lambda) = [s(s + 1)]^{1/2} \sum_{\sigma'} \langle s\sigma, 1q | s\sigma' \rangle v_{\sigma'}(\lambda), \quad (32)$$

где $q = -1, 0, 1$.

Воздействуя на выражение (29) операторами J_z и J^2 , в силу (8) и (30) — (32) получим

$$J_z \psi_{\mu} = \hbar \mu \psi_{\mu}, \quad (33)$$

$$J^2 \psi_{\mu} = \hbar^2 J(J + 1) \psi_{\mu}, \quad J = 1/2, \quad (34)$$

т. е. ψ является собственной функцией J_z и J^2 с собственным значением $\hbar \mu$ проекции J на произвольную ось z и собственным значением $1/2(1/2 + 1)\hbar^2$ квадрата полного момента в рассматриваемом случае. Соответствующая J сохраняющаяся величина для частиц, описываемых уравнением Дирака, в работе [5] был назван биспином.

Использование сохранения J_z при учете произвольности направления оси z дало возможность в работе [5] вычислить вероятность испускания электронов при распаде поляризованных связанных $\mu^{\pm}$ -мезонов в магнитном поле.

Воздействуем на функцию (29) оператором вращения (17), учитывая, что $Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r, \varphi_r)$, $Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p, \varphi_p)$ и $v_{\sigma}(\lambda)$ являются базисами представлений группы вращений и преобразуются через соответствующие D -функции:

$$R^r Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r, \varphi_r) = \sum_{m_1'} D_{m_1' m_1}^{L_1}(\alpha\beta\gamma) Y_{L_1 m_1'}(\vartheta_r, \varphi_r),$$

$$R^p Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p, \varphi_p) = \sum_{m_2'} D_{m_2' m_2}^{L_2}(\alpha\beta\gamma) Y_{L_2 m_2'}(\vartheta_p, \varphi_p),$$

$$R^s v_{\sigma}(\lambda) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}^s(\alpha\beta\gamma) v_{\sigma'}(\lambda). \quad (35)$$

Для D -функций, определяющих матрицы вращения, имеют место соотношения [6]

$$D_{m_1 m_1}^{L_1} D_{m_2 m_2}^{L_2} = \sum_{L' m' m} \langle L_1 m_1, L_2 m_2 | L' m' \rangle D_{m' m}^{L'} \langle L_1 m_1, L_2 m_2 | L' m \rangle,$$

$$D_{s' s}^J D_{m' m}^L = \sum_{J' \mu' \mu} \langle s', L m' | J' \mu' \rangle D_{\mu' \mu}^{J'} \langle s, L m | J' \mu \rangle. \quad (36)$$

Из выражений (17), (18), (29), (35) и (36) следует, что

$$R_{\mu}^{\psi} = \sum_{\mu'} D_{\mu' \mu}^J(\alpha, \beta, \gamma) \psi_{\mu'}, \quad (37)$$

т. е. решение уравнения Дирака при вращениях в трехмерном пространстве преобразуется по неприводимому представлению группы SO_3 , генерируемому оператором (8), с квантовым числом квадрата $J = 1/2$.

Заметим, что для скалярной частицы, используя лишь разложение (25), аналогичным образом можно показать, что имеют место (33), (34) и (37) с $J = 0$.

§ 4. Разрешение парадокса

Согласно существующим представлениям (см., например, [1], § 33), для свободной частицы наряду с состояниями, в которых она обладает определенными значениями импульса (и энергии), могут быть также состояния, в которых частица обладает определенными значениями энергии, а также квадрата и z -компоненты момента, оператор которого есть L^r .

В нерелятивистском приближении решение уравнения Шредингера приводит к волновым функциям

$$\psi_{ELm} = R_{EL}(r) Y_{Lm}(\vartheta, \varphi), \quad (38)$$

где

$$R_{EL}(r) = \sqrt{\frac{k}{r}} J_{L+1/2}(kr), \quad (39)$$

$k = p/\hbar = \sqrt{2ME}/\hbar$. Таким образом, для выражения (38) имеют место

$$H \psi_{ELm} = E \psi_{ELm}, \quad (40)$$

$$L^2 \psi_{ELm} = \hbar^2 L(L+1) \psi_{ELm}, \quad (41)$$

$$L_z \psi_{ELm} = \hbar m \psi_{ELm}. \quad (42)$$

Сохранение момента с оператором L^r следует из традиционного представления об изотропности пространства (см. [1], § 24). Однако легко видеть, что в состояниях, описываемых функцией (38), импульс (конкретнее, его направление) не сохраняется. Действительно, воспользовавшись разложением (25) и представив (38) в виде

$$\psi_{ELm} = \frac{p}{(2\pi)^{3/2} \hbar} \int Y_{Lm}(\vartheta_p, \varphi_p) e^{i p r / \hbar} d\Omega_p, \quad (43)$$

нетрудно видеть, что ψ_{ELm} не является собственной функцией оператора $-\hbar \nabla^2$, т. е. следствие изотропности пространства в традиционном представлении не совместимо со следствием (6) однородности пространства. Кроме того, что не менее важно, оно находится в противоречии с принципом соответствия. Результаты, получаемые в квантовой механике, должны совпасть с результатами классической физики в пределах ее применимости.

Утверждение о сохранении момента с оператором L' (и следовательно возможности несохранения импульса) для свободной частицы не согласуется с первым законом Ньютона, который гласит, что каждое тело продолжает оставаться в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения, пока другие тела не выведут его из этого состояния.

Причиной противоречия является упущение факта, что наряду с радиусом-вектором в координатном пространстве имеют направление импульс и спин, вследствие чего изотропность пространства для свободной частицы приводит к сохранению физической величины, оператором которой является не L' , а $L' + L^p + s$, т. е. полного момента (см. § 2). Таким образом, состояния, описываемые функцией (38), в природе не существуют. Кстати, это выражение не используется в конкретных расчетах, результаты которых претендуют на сравнение с экспериментом.

Для свободных частиц пространство и однородно, и изотропно вследствие чего их волновая функция есть собственная функция как операторов энергии и импульса (6), так и оператора полного момента (8). В том, что эти требования совместимы, мы убедились на примере решения релятивистского уравнения Дирака в § 3. Не представляет трудностей убедиться в этом и в других конкретных случаях.

Операторы J_z и P имеют общую волновую функцию, хотя и не коммутируют, т. е. известная теорема, утверждающая невозможность такой ситуации, не имеет места. Это связано с нарушением ее условия, которое предполагает, что ни один из операторов не действует на собственное значение другого ($\hat{L} \hat{M} \psi_{LM} = \hat{L} M \psi_{LM}$, $\hat{M} \hat{L} \psi_{LM} = M \hat{L} \psi_{LM}$; если бы $\hat{L}$ не действовал на M , то $(\hat{L} \hat{M} - \hat{M} \hat{L}) \Psi = 0$, $\Psi = \sum a_{LM} \psi_{LM}$). Здесь же J_z действует на собственное значение оператора импульса.

При наличии внешнего поля, вообще говоря, нарушаются однородность и изотропность пространства. Однако в частном случае центрально-симметричного поля изотропность трехмерного пространства остается наряду с однородностью оси времени. При движении частицы в таком поле импульс не сохраняется, сохраняются лишь энергия и полный момент (8). Последний сводится в этом случае к $L' + s$, поскольку в результате воздействия L^p на волновую функцию получается нуль из-за независимости этой функции от θ_p и φ_p [4]. Значения квантового числа квадрата J задаются соотношениями $L - s \leq J \leq L + s$ при $s \leq L$ и $s - L \leq J \leq s + L$ при $s > L$.

§ 5. Специальное преобразование Лоренца

Чтобы исчерпать рассматриваемую проблему остается рассмотреть следствие изотропности при вращении в подпространстве четырехмерного пространства — «плоскости», образованной осью времени и направлением движения. При вращении в этой плоскости две компоненты четырехмерного радиуса-вектора, перпендикулярные к направлению движения, не преобразуются. Остальная часть, которую мы обозначим через $\mathbf{x}$, преобразуется как двумерный вектор:

$$\mathbf{x} = \hat{t}ct + \hat{p}ir_p, \quad (44)$$

где r_p — проекция радиуса-вектора на направление движения, $\hat{t}$ и $\hat{p}$ — взаимно ортогональные единичные векторы.

Преобразования

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cos \varphi - ir_p \sin \varphi, \\ ir_p' &= ct \sin \varphi + ir_p \cos \varphi \end{aligned} \quad (45)$$

можно записать с помощью этого вектора, если учесть, что согласно (44)

$$ct = x \cos \varphi_x, \quad ir_p = x \sin \varphi_x, \quad \S (46)$$

$$\varphi_x = \arctg \frac{ir_p}{ct}. \quad (47)$$

Длина вектора $\mathbf{x}$ является инвариантом преобразования: $(ct)^2 + (ir_p)^2 = x^2$. Подставляя (46) в (45), получаем

$$ct' = x \cos(\varphi_x + \varphi), \quad ir_p' = x \sin(\varphi_x + \varphi). \quad (48)$$

Теперь по аналогии с рассмотренным случаем вращения в трехмерном подпространстве (§ 2) мы должны принять, что существует еще вектор, который наряду с $\mathbf{x}$ вращается при повороте системы координат. Указанным вектором является Mc^2 . Для него имеют место соотношения

$$Mc^2 = \hat{t}E + \hat{p}ipc, \quad (49)$$

$$E = Mc^2 \cos \varphi_M, \quad ipc = Mc^2 \sin \varphi_M, \quad (50)$$

$$\varphi_M = \text{Arc tg } \frac{ipc}{E}, \quad E^2 + (ipc)^2 = M^2 c^4. \quad (51)$$

Таким образом, известное соотношение между энергией и импульсом свободной частицы является не чем иным, как выражением факта инвариантности длины вектора трансляций (энергии-импульса) при вращении четырехмерной системы координат. Масса (точнее Mc) есть мера длины четырехмерного вектора трансляций для каждой частицы.

Обозначив $v = pc^2/|E|$, имеем:

$$\text{при } E > 0 \quad \varphi_M = \arctg i \frac{v}{c} = i \operatorname{arctg} \frac{v}{c},$$

$$\text{при } E < 0 \quad \varphi_M = \pi - \arctg i \frac{v}{c} = \pi - i \operatorname{arctg} \frac{v}{c}. \quad (51a)$$

При преобразовании Лоренца вектор Mc^2 поворачивается в новой системе на тот же угол φ , что и вектор $\mathbf{x}$:

$$E' = Mc^2 \cos(\varphi_M + \varphi), \quad ip'c = Mc^2 \sin(\varphi_M + \varphi). \quad (51b)$$

Учитывая аналогично трехмерному случаю, что $\delta \mathbf{x} = [\delta \varphi \mathbf{x}]$ и $\delta Mc^2 = [\delta \varphi Mc^2]$, в новой системе после поворота волновую функцию, зависящую от векторов $\mathbf{x}$ и Mc^2 , запишем в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, Mc^2 + \delta Mc^2) &= (1 + [\delta \varphi \mathbf{x}] \nabla_{\mathbf{x}} + \\ &+ [\delta \varphi Mc^2] \nabla_{Mc^2}) \psi(\mathbf{x}, Mc^2) = \\ &= [1 + \delta \varphi ([\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}}] + [Mc^2 \nabla_{Mc^2}])] \psi(\mathbf{x}, Mc^2). \end{aligned} \quad (52)$$

Введем оператор полного момента для вращения в рассматриваемой плоскости:

$$J^4 = L^t + L^E, \quad (53)$$

где

$$L^t = -i\hbar [\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}}], \quad L^E = -i\hbar [Mc^2 \nabla_{Mc^2}]. \quad (54)$$

Учитывая, что согласно (44)–(46), (49), (50) и (54)

$$L^t = -i\hbar [\hat{t} \hat{p}] \left(ct \frac{\partial}{\partial ir_p} - ir_p \frac{\partial}{\partial ct} \right) = [\hat{t} \hat{p}] \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_x} \right) = [\hat{t} \hat{p}] L^t, \quad (55)$$

$$L^E = [\hat{t} \hat{p}] \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_M} \right) = [\hat{t} \hat{p}] L^E, \quad (56)$$

$$\delta \varphi = [\hat{t} \hat{p}] \delta \varphi, \quad (57)$$

для вращения на конечный угол φ из (52) получаем

$$\psi(\mathbf{x}', M'c^2) = R^4 \psi(\mathbf{x}, Mc^2), \quad (58)$$

где

$$R^4 = e^{i\varphi J^4/\hbar} \quad (59)$$

есть оператор преобразования Лоренца (вращения в рассматриваемой плоскости),

$$J^4 = L^t + L^E, \quad (60)$$

$$L^t = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_x}, \quad L^E = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_M}, \quad (61)$$

$$R^4 = R^t \cdot R^E, \quad R^t = e^{i\varphi L^t/\hbar}, \quad R^E = e^{i\varphi L^E/\hbar}. \quad (62)$$

Согласно (53)–(57), L^t , L^E , J^4 направлены перпендикулярно к направлению движения и при умножении на φ дают скалярные величины. Специальное преобразование Лоренца заключается в переходе к системе координат, движущейся относительно первоначальной со скоростью v .

Согласно (45), $-iv/c = \operatorname{tg} \varphi$, т. е. в выражении (59) $i\varphi = \operatorname{arctg} v/c$. Из-за мнимости φ изотропность не приводит, вообще говоря, к сохранению отличной от нуля физической величины. Исключение составляют лишь частицы, описываемые уравнением Вейля (см. § 6). При специальном преобразовании Лоренца решения уравнения Дирака постоянство плотности вероятности не имеет места. Это преобразование имеет вид

$$\psi_{\nu, \lambda}(t', r', E', p', s, J, J_z) = e^{i\varphi(L^t + L^E)/\hbar} \psi_{\nu, \lambda}(t, r, E, p, s, J, J_z), \quad (63)$$

где решение свободного уравнения Дирака есть

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e^{-i[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2] \alpha_p/2}}{\sqrt{\operatorname{ch} i 2\xi[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]}} v_{\mu}(\lambda) \chi_{\xi}(\nu) e^{-iM c x \cos(\varphi_M - \varphi_x)/\hbar}. \quad (64)$$

Здесь $\xi = E/2|E|$, $\chi_{\xi}(\nu) = \delta_{\xi\nu}$ — спинор в пространстве орбитального момента [5], $\alpha_p = \beta_x 2s_p/\hbar$ — матрица Дирака,

$$\beta_x \chi_{\xi}(\nu) = \chi_{-\xi}(\nu), \quad -iM c x \cos(\varphi_M - \varphi_x) = -i(Et - pr),$$

согласно (46) и (50), $\sqrt{V} \sqrt{\operatorname{ch} i 2\xi[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]} = \sqrt{V_0}$ — инвариант. Записав (64) в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} u_{\xi\mu}(\nu, \lambda) \exp[i(pr - 2\xi\epsilon t)/\hbar],$$

где $u_{\xi\mu}(\nu, \lambda) = (\exp \xi \alpha_p \operatorname{arctg} v/c) \chi_{\xi}(\nu) v_{\mu}(\lambda) / \sqrt{\operatorname{ch} \operatorname{arctg} v/c}$ — биспинор, для значений $u_{\xi\mu}(\nu, \lambda)/N$ ($N = \sqrt{(Mc^2 + \epsilon)/\epsilon}$, $\epsilon = |E|$, $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$) имеем

$\nu \backslash \lambda$		ξ		$1/2$		$-1/2$	
		μ		$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
$1/2$	$1/2$			1	0	$\frac{-p_z c}{Mc^2 + \epsilon}$	$\frac{-p_- c}{Mc^2 + \epsilon}$
	$-1/2$			0	1	$\frac{-p_+ c}{Mc^2 + \epsilon}$	$\frac{p_z c}{Mc^2 + \epsilon}$
$-1/2$	$1/2$			$\frac{p_z c}{Mc^2 + \epsilon}$	$\frac{p_- c}{Mc^2 + \epsilon}$	1	0
	$-1/2$			$\frac{p_+ c}{Mc^2 + \epsilon}$	$\frac{-p_z c}{Mc^2 + \epsilon}$	0	1

С учетом (61) выражение (63) эквивалентно разложению Тейлора, приводящему к замене в (64) φ_x и φ_M соответственно на $\varphi_x + \varphi$ и $\varphi_M + \varphi$, в согласии с (46), (48), (50) и (516).

В системе покоя частицы $t = t_0$, $r = r_0$, $E = 2\xi Mc^2$, $p = 0$. Согласно (51a)

$$\varphi_M^0 = (1-2\xi) \pi/2 = \begin{cases} 0 & \text{при } E > 0 \\ \pi & \text{при } E < 0, \end{cases}$$

$$[\psi_{\nu, \lambda}(t, r, E, p, s, J, J_z)]_{\varphi_x = \varphi_x^0, \varphi_M = \varphi_M^0} = \frac{1}{\sqrt{V}} v_{\mu}(\lambda) \chi_{\xi}(\nu) e^{-i 2\xi Mc^2 t_0 / \hbar}.$$

При переходе в лабораторную систему, движущуюся относительно системы покоя частицы со скоростью $-|v| = -pc^2/E$, φ_x^0 и φ_M^0 получают преобразование $\arctg ipc/E = 2\xi \arctg iv/c = 2i\xi \operatorname{arcth} v/c$ ($v = pc^2/E$) и перейдут в $\varphi_x = \varphi_x^0 + 2\xi \arctg iv/c$ и $\varphi_M = (1-2\xi) \pi/2 + 2\xi \arctg iv/c$. В результате t_0 , r_0 , $2\xi Mc^2$ и $p_0 = 0$ по формулам (46), (48), (50) и (51a) преобразуются соответственно в t , r , E и p .

Следствием сохранения полной вероятности является унитарность матрицы

$${}_{\mu'\xi'} u_{\mu\xi} = {}_{\mu'\xi'} \{ \exp \{ -i [\varphi_M - (1-2\xi) \pi/2] \times \\ \times \alpha_p/2 \} \}_{\mu\xi} / \sqrt{\operatorname{ch} i 2\xi [\varphi_M - (1-2\xi) \pi/2]}$$

в выражении (64). Действительно,

$${}_{\mu'\xi'} (u^\dagger u)_{\mu\xi} = \frac{{}_{\mu'\xi'} [e^{(\xi'+\xi) \alpha_p \operatorname{arctg} v/c}]_{\mu\xi}}{\operatorname{ch} \operatorname{arctg} v/c} = \\ = \frac{\delta_{\mu'\mu} \delta_{\xi'\xi} \operatorname{ch} (\xi' + \xi) \operatorname{arctg} v/c + {}_{\mu'\xi'} (\alpha_p)_{\mu\xi} (\xi' + \xi) \operatorname{sh} \operatorname{arctg} v/c}{\operatorname{ch} \operatorname{arctg} v/c} = \delta_{\mu'\mu} \delta_{\xi'\xi}.$$

Из (60), (61), (63) и (64) следует, что

$$J^\mu \psi = - \frac{\hbar \alpha_p}{2} \psi. \quad (65)$$

Заметим, что согласно Паули [7] принято считать (см., например, [4, 8]), что при собственном преобразовании Лоренца решение уравнения Дирака преобразуется как $\psi' = S\psi$, $S = \exp(-i\varphi \alpha_p/2)$, $\varphi = i \operatorname{arctg} v/c$. Исходя из вышеизложенного нетрудно видеть, что это преобразование, в отличие от (58), (59), относится только к волновым функциям частиц со спином 1/2 и не преобразует величины t , r , E и p , от которых в инвариантной форме зависит плоская волна. Наряду с неточностью в доказательстве релятивистской инвариантности в работе [4] допущена неточность и при рассмотрении инвариантности уравнения Дирака при повороте. Второй спинор, не говоря о полной волновой функции, не преобразуется с помощью оператора $1 + i\partial\Sigma/2$ (см. §§ 2, 3 настоящей статьи).

§ 6. Сохранение спиральности для частиц, описываемых уравнением Вейля

Волновая функция частиц со спином 1/2, рождающихся при слабом взаимодействии, имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \gamma_5) \psi_D, \quad (66)$$

где ψ_D дается выражением (64). При $E \gg Mc^2$, что имеет место, в частности, для $e^\pm$, ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$, рождающихся при распаде мюонов, волновая функция (66) практически является решением уравнения Вейля

$$-2ic(s\nabla)\psi = E\psi. \quad (67)$$

Действительно, учитывая, что $\gamma_5 = -\beta_x$ [5], из (50), (51a), (64) и (66) имеем $v = c$,

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{V}} [\chi_{1/2}(v) + \chi_{-1/2}(v)] [1 + 2c(sp)/\hbar E] v_\mu(\lambda) \exp[i(pr - Et)/\hbar], \quad (68)$$

откуда видно, что (67) удовлетворяется.

Важность биспина особенно наглядно видна для частиц, описываемых уравнением Вейля. Записав (68) в виде

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{V}} [\chi_{1/2}(v) + \chi_{-1/2}(v)] \sum_{L, m, \sigma} (-1)^{L(1-E/\hbar E)^{1/2}} \langle s\sigma, Lm | J\mu \rangle \times \\ \times Y_{Lm}(\theta_p, \varphi_p) v_\sigma(\lambda) \exp[i(pr - Et)/\hbar], \quad (69)$$

где $J = s = 1/2$, нетрудно убедиться, что, как и в случае решения уравнения Дирака,

$$J_z \psi = \hbar \mu \psi, \quad (70)$$

$$J^2 \psi = \hbar^2 J(J+1) \psi. \quad (71)$$

Здесь J есть оператор полного момента, названного для рассматриваемого случая $J = 1/2$ биспином [5], $\hbar \mu$ в выражениях (68) и (69) не может рассматриваться как проекция спина. Как видно из (68), проекция спина s_z имеет определенное значение, и при том одно ($\hbar/2$ — для частиц и $-\hbar/2$ — для античастиц), лишь тогда, когда ось z совпадает с направлением движения. Когда ось z не совпадает с направлением движения, в выражении (68) μ может принимать два значения: $\pm 1/2$. Как следует из (68) и (70), решение уравнения Вейля описывает состояния с определенными значениями импульса и проекции биспина $\hbar \mu$.

Записав в выражении (68)

$$1 + 2c(sp)/\hbar E = 1 + 4\xi(sp)/\hbar |p|$$

и учитывая, что

$$\beta_x [\chi_{1/2}(v) + \chi_{-1/2}(v)] = \chi_{1/2}(v) + \chi_{-1/2}(v) \quad (72)$$

и

$$s_p [1 + 4\xi(sp)/\hbar |p|] = \hbar \xi [4\xi(sp)/\hbar |p| + 1], \quad (73)$$

согласно (65), (66) и (68) имеем

$$J^4 \psi = -\frac{\hbar^2 p}{2} \psi = -\beta_x s_p \psi = -s_p \psi = -\hbar \xi \psi. \quad (74)$$

Для частиц, движущихся со скоростью света, из (45)—(48) и (51a) следует, что

$$\varphi_x = \varphi_x^0 + 2\xi \operatorname{arctg} i, \quad \varphi_M = (1 - 2\xi) \pi/2 + 2\xi \operatorname{arctg} i. \quad (75)$$

Учитывая, что после действия оператора (59) фазы φ_x и φ_M получают приращение $2\xi \operatorname{arctg} i v/c$, причем

$$2\xi \operatorname{arctg} i + 2\xi \operatorname{arctg} i v/c = 2\xi \operatorname{arctg} i \frac{1 + v/c}{1 + v/c} = 2\xi \operatorname{arctg} i, \quad (76)$$

нетрудно видеть, что φ_x , φ_M и, следовательно, волновая функция, а вместе с ними и плотность вероятности не изменяются.

Таким образом, для частиц, описываемых уравнением Вейля, из изотропности четырехмерного пространства следует постоянство плотности вероятности при поворотах в «плоскости», образованной осью времени и направлением движения, т. е. при специальных преобразованиях Лоренца. Последнее приводит к тому, что спиральность сохраняется, будучи положительной для частиц ($\xi > 0$) и отрицательной для античастиц ($\xi < 0$). Справедливость этого утверждения известна из экспериментов по изучению слабого взаимодействия.

Автор выражает благодарность коллегам по институту за полезные дискуссии.

Ереванский физический
институт

Поступила 9. IX. 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, ГИТТЛ, М.—Л., 1948; Изд. физ.-мат. литературы, М., 1963.
2. Р. М. Мурадян. Препринт ОИЯИ P2-3902, 1968.
3. Е. Визнер. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, Изд. ИЛ, М., 1961.
4. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, ГИТТЛ, М., 1953; Изд. физ.-мат. литературы, 1959.
5. В. А. Джрбашян. ДАН СССР, 254, 1116 (1980).
6. О. Бор, Б. Моттelson. Структура атомного ядра, Изд. Мир, М., 1971.
7. В. Паули. Общие принципы волновой механики, ГИТТЛ, М.—Л., 1947.
8. Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл. Релятивистская квантовая теория, т. 1, Изд. Наука, М., 1978.

ՔԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՍԵՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԻԶՈՏՐՈՊՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ

Վ. Հ. ԶՐԱՇՅԱՆ

Ֆիզիկական մեծությունների պահպանումը ստացվում է հավանականության խտության հաստատունության պահանջից զուգահեռ տեղափոխության և պտտման ձևափոխությունների ժամանակ, քառաչափ տարածության համասեռության հայտնի հետևանքի՝ էներգիայի և իմպուլսի պահպանման օրենքի ստացման հետ մեկտեղ ցույց է տրված, որ եռաչափ տարածության իզոտրոպության հետևանք է հանդիսանում անցյալում անհայտ շարժման քանակի

լրիվ մոմենտի պահպանումը, որը հավասար է շառավիղ-վեկտորի, իմպուլսի և սպինի պտտման մոմենտների գումարին: Քառաչափ տարածության նեթատարածության՝ ժամանակի առանցքով և շարժման ուղղությամբ կաղնված «հարթության» իզոտրոպության հետևանքն է վեկտի հավասարումով նկարագրվող մասնիկների պարուրության պահպանումը: Այն դեպքում, երբ ֆիզիկական հասկանալի պատճառներով հավանականության խտության հաստատունությունը տեղի չունի, պահպանվում է միայն լրիվ հավանականությունը (նորմավորումը):

THE CONSEQUENCES OF HOMOGENEITY AND ISOTROPY OF THE FOUR-DIMENSIONAL SPACE

V. A. DJRBASHIAN

It is shown that the total wave function of an arbitrary free particle is transformed according to both the representation of translation group and that of rotation group in the 4-dimensional space, since the free space is simultaneously homogeneous and isotropic. The conservation of physical quantities follows from the requirement of the constancy of probability density for the translation and rotation transformations. Besides the well-known consequence of the 4-dimensional space homogeneity—the energy and momentum conservation, it is shown that as a consequence of the 3-dimensional space isotropy the hitherto unknown total angular momentum is conserved. The latter is equal to the sum of the angular momenta connected with the variation of angles determining the directions of the radius-vector, momentum and spin under three-dimensional coordinate system rotation. The conservation of helicity of particles described by the Weyl equation is the consequence of isotropy of the subspace—the “plane” formed by the time axis and the direction of motion. In those cases when for physically understandable reasons the local probability is not conserved, only the conservation of the integral probability (normalization) takes place. The earlier unknown expressions for total rotation operators are obtained.