

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНОВОДА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

К. А. БАРСУКОВ, Г. А. ГРИГОРЯН

На основе ранее предложенного авторами метода исследования нестационарных волноводов предлагается метод расчета полей, возбужденных в таком волноводе произвольной системой токов и зарядов при произвольном законе движения границы волновода.

В работе [1] развита теория волноводов с движущимися границами, позволяющая исследовать модовую структуру полей в таких волноводах. Ниже предлагается метод расчета возбуждения волновода с подвижной границей произвольно распределенной в нем системой токов и зарядов. Для сокращения изложения используются обозначения и формулы статьи [1], ссылки на которые даются двойной нумерацией.

Пусть в волноводе, описанном в [1], находится система зарядов и токов, задаваемых функциями $j(x, y, z, \tau)$ и $\rho(x, y, z, \tau)$, $\tau = ct$. Представим эти функции в виде

$$\begin{aligned} j_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{j}_{xn}(x, \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{ihz} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_{xn} dh, \\ j_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{j}_{yn}(x, \tau) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{ihz} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_{yn} dh, \\ j_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{j}_{zn}(x, \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{ihz} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_{zn} dh, \\ \rho &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\rho}_n(x, \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{ihz} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n dh. \end{aligned} \quad (1)$$

Наличие пространственного распределения источников в волноводе несколько меняет формулы (1.2) для распределений полей E и H :

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(1)}(x, \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{ihz} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{xn} dh, \quad \vec{E}_{\perp} = z \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_{\perp n} dh, \\ H_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(2)}(x, \tau) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{ihz} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{xn} dh, \quad H_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{\perp n} dh, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp n} &= \frac{1}{\Delta_n^2} \left[\nabla \left(\frac{\partial E_{xn}}{\partial x} \right) - \text{rot} \left(\frac{\partial H_{xn}}{\partial \tau} \mathbf{e}_x \right) - 4\pi \nabla \rho_n \right], \\ \mathbf{H}_{\perp n} &= \frac{1}{\Delta_n^2} \left[\nabla \left(\frac{\partial H_{xn}}{\partial x} \right) + \text{rot} \left(\frac{\partial E_{xn}}{\partial \tau} \mathbf{e}_x \right) - \frac{4\pi}{c} \nabla \left(\frac{\pi n}{b} j_{xn} \mathbf{e}_x \right) \right]. \end{aligned}$$

Потенциалы поля $U_n^{(1)}(x, \tau)$ и $U_n^{(2)}(x, \tau)$ удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial x^2} + \Delta_n^2 U_n^{(1,2)} = \tilde{F}_n^{(1,2)}(x, \tau), \quad (3)$$

$$\tilde{F}_n^{(1)} = -\frac{4\pi}{c} \left(\tilde{j}_{xn} + c \frac{\partial \rho_n}{\partial x} \right), \quad \tilde{F}_n^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\pi n}{b} \tilde{j}_{xn} - i\hbar j_{yn} \right).$$

Если также, как это было сделано в [1], перейти к новым переменным ξ и η , то уравнения (3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial \eta^2} + \Delta_n^2 G(\xi, \eta) U_n^{(1,2)} = F_n^{(1,2)}, \quad (4)$$

где $F_n^{(1)} = \tilde{F}_n^{(1)} G$, $F_n^{(2)} = \tilde{F}_n^{(2)} G$, причем в выражениях $F_n^{(1,2)}$ τ и x являются функциями ξ и η согласно (1.6), а G определяется как $|F(w)|_{\eta=1\eta}^2$.

При этом остаются в силе граничные условия (1.11) для потенциалов $U_n^{(1,2)}(\xi, \eta)$.

Предположим, что движение стенки волновода реализует один из трех случаев замены переменных, когда переменные в (4) разделяются [1]:

$$G(\xi, \eta) = G_1(\xi) + G_2(\eta). \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение

$$Y_n''(\eta) + [\mu^2 - \Delta_n^2 G_2(\eta)] Y_n(\eta) = 0 \quad (6)$$

с краевыми условиями на отрезке $[0, \eta_0]$ первого или второго рода, типа (1.11). Уравнение (6) (см. [2]) имеет нетривиальные решения Y_{nm} при фиксированных значениях $\mu_n = \mu_{nm}$, причем система функций является ортогональной и полной. Отнормируем функции Y_{nm} на единицу и для отыскания частного решения (4) представим U_n и F_n в виде

$$U_n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm}(\xi) Y_{nm}(\eta), \quad F_n = \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}(\xi) Y_{nm}(\eta), \quad (7)$$

где для $U_n^{(2)}$ и $U_n^{(1)}$ берется семейство функций $Y_{nm}^{(1,2)}(\eta)$, удовлетворяющих соответственно первому или второму краевому условию, что обеспечивает выполнение граничных условий (1.11) автоматически. В силу ортогональности функций Y_{nm} коэффициенты в (7) находятся по стандартной формуле

$$F_{nm}(\xi) = \int_0^{\eta_0} F_n(\xi, \eta) Y_{nm}(\eta) d\eta. \quad (8)$$

Подстановка (7) в (4) дает

$$U_{nm}'(\xi) + [\mu_{nm}^2 + \Delta_n^2 G_1(\xi)] U_{nm}(\xi) = F_{nm}(\xi), \quad (9)$$

где μ_{nm} — собственные числа уравнения (6). Будем считать известной фундаментальную систему однородного уравнения (9). Обозначим функции этой системы через $U_{nm}^{(1)}$ и $U_{nm}^{(2)}$ и отнормируем их следующим образом:

$$U_{nm}^{(1)} \frac{dU_{nm}^{(2)}}{d\xi} - U_{nm}^{(2)} \frac{dU_{nm}^{(1)}}{d\xi} = 1, \quad (10)$$

так как для уравнения (9) якобиан является постоянной величиной.

Тогда с помощью метода вариации постоянных общее решение может быть записано в виде

$$U_{nm}(\xi) = c_{nm} U_{nm}^{(1)}(\xi) + d_{nm} U_{nm}^{(2)}(\xi) + \int_0^\xi F_{nm}(\zeta) [U_{nm}^{(2)}(\xi) U_{nm}^{(1)}(\zeta) - U_{nm}^{(1)}(\xi) U_{nm}^{(2)}(\zeta)] d\zeta, \quad (11)$$

где постоянные c_{nm} и d_{nm} определяются из начальных условий. Последний член в (11) может быть записан в виде двойного интеграла с помощью (8):

$$I_{nm}(\xi) = \int_0^\xi \int_0^{\eta_0} F_n(\zeta, \theta) Y_{nm}(\theta) [U_{nm}^{(2)}(\xi) U_{nm}^{(1)}(\zeta) - U_{nm}^{(1)}(\xi) U_{nm}^{(2)}(\zeta)] d\zeta d\theta. \quad (12)$$

Таким образом, общее решение задачи дается соотношениями (2), (8), (9), (11) и (12). Отметим, что из структуры уравнений (6) и (9) следует, что точное решение задачи, как и в [1], возможно лишь в трех случаях движения границы волновода, а именно, при линейном, гиперболическом и эллиптическом законах движения.

При исследовании конкретных случаев из-за возникающих математических трудностей решение задачи проще проводить приближенно. Для нахождения фундаментальной системы (9), как и в [1, 3], можно использовать метод ВКБ. Если вместо функций $U_{nm}^{(1)}$ и $U_{nm}^{(2)}$ взять их приближенные выражения, получающиеся этим методом, то (12) несложно преобразуется. Введем в (9) обозначение $\mu_{nm}^2 + \Delta_n^2 G_1(\xi) = x_{nm} Q_{nm}(\xi)$, где x_{nm} — большой параметр. Тогда с помощью известных приближенных выражений $U_{nm}^{(1,2)}$ (12) представится в виде

$$I_{nm} = \frac{1}{x_{nm} \sqrt[4]{Q_{nm}}} \int_0^\xi \int_0^{\eta_0} \frac{F_n(\xi', \eta') Y_{nm}(\eta')}{\sqrt[4]{Q_{nm}(\xi')}} \times$$

$$\times \sin \left[x_{nm} \left(\int_0^{\xi} \sqrt{Q_{nm}(\xi)} d\xi - \int_0^{\xi'} \sqrt{Q_{nm}(\xi)} d\xi \right) \right] d\xi' d\eta'. \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим возбуждение нестационарного волновода точечным покоящимся зарядом при равномерном движении стенки волновода. Плотность заряда такого источника, очевидно, может быть представлена соотношением

$$\rho = q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z), \quad (14)$$

где q — величина заряда, x_0, y_0, z — координаты заряда. В момент времени $\tau = 0$ боковая стенка начинает двигаться по закону $x = \bar{a}(\tau) = a + \beta\tau$,

где $v = \beta c$ — скорость движения стенки; при этом $\tilde{F}_n^{(2)} = 0$, а для $\tilde{F}_n^{(1)}$ имеем по формуле (3)

$$\tilde{F}_n^{(1)} = -4\pi q \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z), \quad (15)$$

и возбуждается гибридная волна, характеризующаяся с помощью нормальной к движущейся стенке волновода составляющей электрического вектора E_x . Для этого случая, как это следует из [1], замена переменных определяется (1.14)

$$x = \frac{a}{\beta} e^{\xi} \operatorname{sh} \eta, \quad \tau = \frac{a}{\beta} (e^{\xi} \operatorname{ch} \eta - 1), \quad F(w) = \frac{a}{\beta} (e^w - 1), \quad (16)$$

и I_{nm} для достаточно медленного движения стенки в приближении ВКБ записывается в виде

$$I_{nm} = - \frac{8q\beta \sin\left(\frac{\pi n}{b} y_0\right)}{b\alpha \Delta_n \gamma_0 \sqrt{e^{2\xi} + \gamma_{nm}^2}} \int_0^{\xi} d\xi' \int_0^{\eta_0} \frac{a^2 e^{2\xi'}}{\sqrt{e^{2\xi'} + \gamma_{nm}^2}} \times \\ \times \cos\left(\frac{\pi m}{\gamma_0} \eta'\right) \sin\left\{\frac{\Delta_n a}{\beta} [\psi_{nm}(\xi) - \psi_{nm}(\xi')]\right\} \delta'\left(\frac{a}{\beta} e^{\xi'} \operatorname{sh} \eta' - x_0\right) d\eta', \quad (17)$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \Delta_n^2 = h^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad \gamma_{nm} = \frac{\pi m \beta}{\alpha \Delta_n \gamma_0}, \quad \psi_{nm}(\xi) = \int_0^{\xi} \sqrt{e^{2\xi} + \gamma_{nm}^2} d\xi.$$

Вычисление этого интеграла при $\beta \ll 1$ дает

$$I_{nm} = - \frac{8qc^2 \pi m}{b\alpha^2 \omega_{nm}^2} \sin\left(\frac{\pi n}{b} y_0\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_0\right) \left(1 - \cos \frac{\bar{\omega}_{nm} \tau}{c} - \right. \\ \left. - \beta \frac{x^2 \bar{\omega}_{nm}}{2ac} \sin \frac{\bar{\omega}_{nm} \tau}{c}\right), \quad \frac{\bar{\omega}_{nm}}{c} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}, \quad (18)$$

и подстановка I_{nm} в (2) позволяет получить частное решение неоднородного уравнения (9), соответствующее нулевым начальным условиям,

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihz} [\cos(\tau \sqrt{h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2}) - 1] dh}{h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2} + \\ + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{2a} A_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihz} \sin(\tau \sqrt{h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2}) dh}{\sqrt{h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2}}, \quad (19)$$

$$A_{nm} = \frac{8\pi qm}{a^2 b} \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad \bar{\lambda}_{nm}^2 = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2.$$

Решение однородного уравнения (9) в приближении ВКБ дается формулой (1.16) при условии (1.17):

$$U_n^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{a} \frac{a_{nm} e^{i\tau_{nm}} + b_{nm} e^{-i\tau_{nm}}}{\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{\Delta_n a}\right)^2}}, \quad (20)$$

$$\varphi_{nm} = \int_0^{\tau} \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} d\tau - \beta \frac{x^2}{2a} \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}.$$

Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} находятся из начальных условий. Последние, очевидно, запишутся в виде

$$E(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\pi qm}{a^2 b} \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihz} dh}{h^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}, \quad \frac{\partial E(x, 0)}{\partial \tau} = 0. \quad (21)$$

Из сравнения (21), (2) и (20) находим

$$E_x^0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\pi qm}{a^2 b} \sqrt{\frac{a}{a}} \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\tau \sqrt{h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2}) e^{ihz} dh}{\sqrt{(h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2)^3 (h^2 + \bar{\lambda}_{nm}^2)}}, \quad \lambda_{nm} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2. \quad (22)$$

Вычисляя интегралы, для полного поля $E_x = E_x^0 + E_x'$ получаем

$$E_x = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\pi qm}{a^2 b} \sqrt{\frac{a}{a}} \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{\pi}{\lambda_{nm}} e^{-\lambda_{nm} z} + \\ + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\pi qm}{2a^3 b a} \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \pi x^2 J_0(\lambda_{nm} \sqrt{\tau^2 - z^2}). \quad (23)$$

Первое слагаемое в (23) определяет квазистатическое поле заряда, которое медленно меняется в пространстве из-за движения стенки, сохраняя свой статический характер. Второе слагаемое описывает распространяющиеся симметрично относительно заряда электромагнитные волны, возникающие при мгновенном ускорении стенки в момент $\tau = 0$. Развитие такой импульсной волны показано на рис. 1, 2 в различные моменты времени.

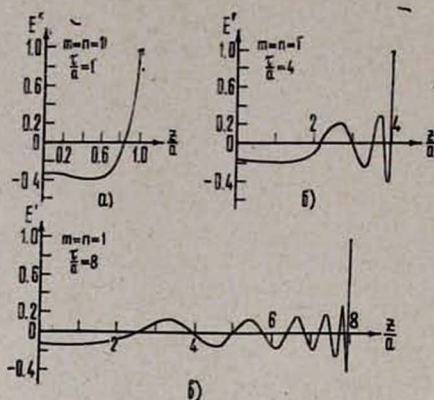


Рис. 1.

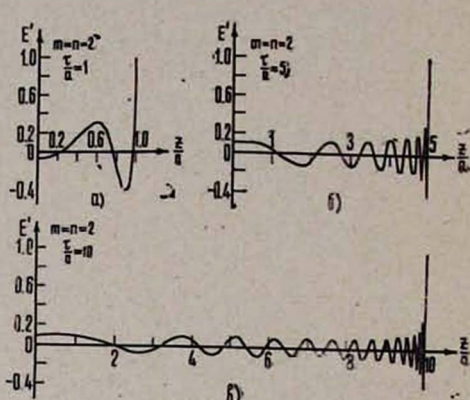


Рис. 2.

мени. Отчетливо видно, что с течением времени и ростом номера моды импульс становится все более коротким.

Ленинградский электротехнический
институт
Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 29. IV. 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, Г. А. Григорян. Изв. ВУЗ, Радиофизика, 19, 603 (1976).
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики, Изд. Наука, М., 1977.
3. М. А. Тер-Микаелян. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1969.

ՇԱՐԺՎՈՂ ՍԱՀՄԱՆՈՎ ԱԼԻՔԱՏԱՐԻ ԳՐԳՈՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ, Գ. Ա. ԳՐԻԳՐՅԱՆ

Հեղինակների կողմից նախկինում առաջարկված մեթոդը զարգացվում է ոչ ստացիոնար ալիքատարում կամայական բաշխվածությամբ հոսանքների սիստեմի և լիցքերի կողմից զերգրված դաշտերը հաշվելու համար՝ ալիքատարի սահմանի կամայական օրենքով շարժվելու դեպքում:

ON THE EXCITATION OF WAVEGUIDE WITH MOVING BOUNDARY

K. A. BARSUKOV, G. A. GRIGORYAN

The earlier proposed method has been developed for the calculation of fields excited by a system of arbitrarily distributed currents and charges in a waveguide with moving boundary.