Изв. АН Армянской ССР, Физика, 15, 417—420 (1980)

# ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА В СЛУЧАЕ ДВУХ СОСТОЯНИЙ

В. А. ДЖРБАШЯН, А. Р. КАВАЛОВ

Исходя из общего решения, выведенного ранее одним из авторов, получено точное решение задачи. На примере двух состояний показано, что в точном решении не возникает необходимости в перенормировке. Из полученного выражения для вероятности в частном случае следует известная формула Раби, описывающая магнитный резонанс.

В противоположность обычно применяемой в литературе трактовке (см., например, [1, 2]) процессы распада и образования, в отличие от процессов рассеяния, не могут описываться $S$-матрицей. Это обусловлено тем обстоятельством, что $S$-матрица связывает состояния при $t=-\infty$ с состояниями при $t=+\infty$, и, например, при распаде существовавшей при $t=-\infty$ связанной системы для вероятности перехода в единицу времени при наблюдаемых $t$ получится нуль. Поэтому необходимо решать уравнения для амплитуд вероятности при других начальных условиях [3]. В результате решения этих уравнений в первом приближении по константе связи [4] возникает ширина $\Gamma$, являющаяся атрибутом системы «уровень + излучение». Таким образом, «стабильные» уровни в присутствии излучения могут иметь ширину. Возбужденные же уровни, являющиеся связанными состояниями системы «уровень + излучение», имеют ширину и в отсутствие внешнего излучения. При наличии внешнего излучения их ширина существенно изменяется [5].

В настоящей работе мы покажем, что в случае двух состояний можно найти точное решение уравнений для амплитуд стационарных состояний [3]:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_m(t)}{\partial t}=\sum_{m'}e^{iE_mt/\hbar}V_{mm'}e^{-iE_{m'}t/\hbar}\Phi_{m'}(t)+i\hbar\delta_{mm_i}\delta(t), \tag{1}$$

удовлетворяющих условиям

$$\Phi_m(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0, \tag{2а}$$

$$\Phi_m(t)=\delta_{mm_i} \quad \text{при} \quad t=+0. \tag{2б}$$

Решение этой системы можно представить в интегральном виде [4]

$$\Phi_m(t)=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}dE\,[\delta_{mm_i}+(1-\delta_{mm_i})W_{mm_i}(E+E_{m_i}-E_m+i\sigma)^{-1}]\times$$

$$\times e^{i(E_m-E_{m_i}-E)t/\hbar}[E+i(\sigma+\hbar\Gamma_{m_i}(E)/2)]^{-1}, \tag{3}$$

где в случае двух состояний $m_i$ и $m_f$

$$W_{m_f m_i} = V_{m_f m_i} + V_{m_f m_f} W_{m_f m_i} (E + E_{m_i} - E_{m_f} + i\sigma)^{-1}, \tag{4}$$

$$\hbar\Gamma_{m_i}(E)/2 = iV_{m_i m_i} + iV_{m_i m_f} W_{m_f m_i} (E + E_{m_i} - E_{m_f} + i\sigma)^{-1}. \tag{5}$$

Решение уравнения (4) есть

$$W_{m_f m_i} = V_{m_f m_i} \frac{E + E_{m_i} - E_{m_f} + i\sigma}{E + E_{m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f} + i\sigma}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в выражение (5) для $\hbar\Gamma_{m_i}(E)/2$, получаем

$$\hbar\Gamma_{m_i}(E)/2 = iV_{m_i m_i} + \frac{i\,|V_{m_i m_f}|^2}{E + E_{m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f} + i\sigma} \tag{7}$$

и

$$[E + i(\sigma + \hbar\Gamma_{m_i}(E)/2]^{-1} = \frac{E + E_{m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f} + i\sigma}{(E - E_1)(E - E_2)}, \tag{8}$$

где

$$E_{1,2} = -\frac{E_{m_i} - V_{m_i m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f} + 2i\sigma}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_{m_i} + V_{m_i m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f})^2 + 4|V_{m_i m_f}|^2}. \tag{9}$$

С учетом (6) и (8) для амплитуды (3) имеем

$$\Phi_m(t) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\delta_{m m_i}\int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iEt/\hbar} \frac{E + E_{m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f}}{(E - E_1)(E - E_2)} + \right.$$

$$\left. + \delta_{m m_f} V_{m_f m_i} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{e^{i(E_{m_f} - E_{m_i} - E)t/\hbar}}{(E - E_1)(E - E_2)}\right]. \tag{10}$$

Замыкая при $t<0$ контур интегрирования в верхней полуплоскости, получаем $\Phi_m(t) = 0$, т. е. выполняется условие (2а). При $t>0$, замыкая контур в нижней полуплоскости, будем иметь

$$\Phi_m(t) = \frac{\exp[i(E_{m_i} - V_{m_i m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f})t/2\hbar]}{E_1 - E_2} \times$$

$$\times\{\delta_{m m_i}[-i(E_{m_i} + V_{m_i m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f})\sin(E_1 - E_2)t/2\hbar +$$

$$+ (E_1 - E_2)\cos(E_1 - E_2)t/2\hbar] - \delta_{m m_f} V_{m_f m_i} e^{i(E_{m_f} - E_{m_i})t/\hbar} \times$$

$$\times 2i\sin(E_1 - E_2)t/2\hbar\}. \tag{11}$$

Здесь

$$E_1 - E_2 = \sqrt{(E_{m_i} + V_{m_i m_i} - E_{m_f} - E_{m_f m_f})^2 + 4|V_{m_i m_f}|^2}. \tag{12}$$

Из выражения (11) видно, что условие (2б) также выполняется.

Отсюда для вероятности перехода за время $t$ из состояния $m_i$ в состояние $m_f$ получаем выражение

$$|\Phi_{m_i}(t)|^2 = \frac{4|V_{m_f m_i}|^2}{(E_1 - E_2)^2}\sin^2(E_1 - E_2)t/2\hbar. \tag{13}$$

Вероятность того, что в момент времени $t$ система будет находиться в начальном состоянии, есть

$$|\Phi_{m_i}(t)|^2 = \frac{1}{(E_1 - E_2)^2} [(E_{m_i} + V_{m_i m_i} - E_{m_f} - V_{m_f m_f})^2 + \\ + 4 |V_{m_i m_f}|^2 \cos^2 (E_1 - E_2) t/2\hbar]. \quad (14)$$

Из (13) и (14) видно, что $\Phi_m$, определяемые согласно (11), нормированы таким образом, что выполняется соотношение

$$|\Phi_{m_i}(t)|^2 + |\Phi_{m_f}(t)|^2 = 1.$$

Как видно из выражений (11)—(14), представляющих точное решение задачи, добавки $V_{mm}$ к энергиям невозмущенных состояний $E_{m_i}$ входят симметрично для состояний $m_i$ и $m_f$, что не имеет места в первом приближении теории возмущений. В приближенной теории [3] эта асимметрия между начальными и конечными состояниями устраняется перенормировкой. Из сказанного выше следует, что в точной теории необходимости в указанной перенормировке не возникает.

Применим формулу (13) для описания магнитного резонанса. Пусть при $t = 0$ атом находился в состоянии с магнитным квантовым числом $M = +1/2$ и энергией $E_{1/2}$. Найдем вероятность обнаружения атома в момент времени $t$ в состоянии с $M = -1/2$ и энергией $E_{-1/2}$. С этой целью заметим, что [6]

$$E_{m_i} - E_{m_f} = E_{1/2} - (E_{-1/2} + \hbar\omega) = -\hbar(\gamma H + \omega). \quad (15)$$

Для матричных элементов оператора взаимодействия $V = -\frac{1}{2} \times \gamma\hbar H_1 (J_x - iJ_y)$ получаем

$$V_{m_i m_i} = V_{m_f m_f} = 0,$$

$$V_{m_f m_i} = \langle -1/2 | V | 1/2 \rangle = -\frac{1}{2} \gamma\hbar H_1. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в выражения (12)—(14), находим

$$|\Phi_{-1/2}(t)|^2 = \frac{(\gamma H_1)^2}{(\gamma H + \omega)^2 + (\gamma H_1)^2} \sin^2 \{[(\gamma H + \omega)^2 + (\gamma H_1)^2]^{1/2} t/2\}, \quad (17)$$

$$|\Phi_{1/2}(t)|^2 = \frac{1}{(\gamma H + \omega)^2 + (\gamma H_1)^2} \{(\gamma H + \omega)^2 + (\gamma H_1)^2 \cos^2 [(\gamma H + \omega)^2 + (\gamma H_1)^2]^{1/2} t/2\}. \quad (18)$$

Выражение (17), представляющее собой частный случай (13), является известным решением Раби [6—9].

Ереванский физический
институт

Поступила 21. VI. 1980

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий.* Квантовая электродинамика, М., 1969.
2. *Дж. Р. Бьёркен, С. Д. Дрелл.* Релятивистская квантовая теория, т. I, М., 1978.

3. *В. Гайтлер.* Квантовая теория излучения, М., 1956.
4. *В. А. Джрбашян.* ДАН СССР, 246, 582 (1979).
5. *В. А. Джрбашян.* ДАН СССР, 251, 595 (1980).
6. *I. I. Rabi.* Phys. Rev., 51, 652 (1937).
7. *А. Абрагам, Б. Блини.* Электронный парамагнитный резонанс переходных ионов, т. I, М., 1972.
8. *А. Абрагам.* Ядерный магнетизм, М., 1963.
9. Экспериментальная ядерная физика, Под ред. Э. Сегре, т. I, М., 1955.

## ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԻ ՀԱՄԱՐ ԵՎ ԱՆՑՄԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿՈՒ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Վ. Հ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Ռ. ԿԱՎԱԼՈՎ

*Օգտագործելով հեղինակներից մեկի կողմից նախկինում դուրս բերված ընդհանուր լուծումը, աշխատանքում ստացված է խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Երկու վիճակների օրինակով ցույց է տրված, որ ճշգրիտ լուծման դեպքում չի առաջանում վերանորմավորման անհրաժեշտություն։ Հավանականության համար ստացված արտահայտությունից մասնավոր դեպքում ստացվում է Ռաբիի բանաձևը, որը նկարագրում է մագնիսական ռեզոնանսը։*

## EXACT SOLUTION FOR PROBABILITY AMPLITUDES AND THE TRANSITION PROBABILITY IN THE CASE OF TWO STATES

V. A. DJRBASHIAN, A. R. KAVALOV

An exact solution of the problem is obtained using the general formula derived earlier by one of the authors. It is shown based on the example of two states, that the necessity for the renormalization doesn't arise in the exact solution. As the special case the Rabi formula for magnetic resonance follows from the obtained expression.